МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«УДМУРТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Филиал ФГБОУ ВО «УдГУ» в г. Воткинске

«УТВЕРЖДАЮ»
Зам. директора по УМР

____________Т.М. Смирнова

«27» апреля 2017г.

МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

Для студентов направлений подготовки:
Прикладная информатика (по отраслям)
09.03.03
Направленность (Профиль)
Прикладная информатика в экономике
09.03.03.02

Воткинск – 2017

Составитель:
О.В. Кузнецова преподаватель кафедры «ИиИТ»

Содержание

Тема 1 Введение в математический анализ

1. Число, переменная, функция.
2. Предел функции.
3. Основные виды неопределенностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс.Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы.

1. Вычислить пределы функций.

а) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}$.

Решение. Прежде всего, проверим, применимы ли к данной дроби теоремы о пределах, или мы имеем дело с неопределенностью. Для этого найдем пределы числителя и знаменателя дроби. Функции $5x^2+1$ и $7x^5+2x+3$ являются бесконечно большими. Поэтому, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(5x^2+1\right)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(7x^5+2x+3\right)=\infty$.

Следовательно, имеем дело с неопределенностью вида $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$.

Для раскрытия этой неопределенности и использовании теоремы о пределе отношения двух функций выделим в числителе и в знаменателе x в старшей для числителя и знаменателя степени в качестве сомножителя и сократим дробь.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+1}{7x^5+2x+3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}{x^5\left(7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x^5}}{7+\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^5}}=\frac{0}{7}=0.$$

Ответ. 0.

б) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно разложить числитель и знаменатель на множители и сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

Ответ. -9.

Найти $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение. Для вычисления данного предела подставим значение $x=-1$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{(-1)^2+14\cdot(-1)-32}{(-1)^2-6\cdot(-1)+8}=\frac{-45}{15}=-3.$$

Ответ. -3.

в) **Найти** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно умножить числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, а затем сократить дробь на общий множитель.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

Ответ. $\frac{1}{2}$**.**

г) **Найти** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$**.**

Решение. Для раскрытия неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ в этом случае, нужно выделить первый замечательный предел: $\lim\limits_{A\to 0}\frac{\sin A}{A}=1$**.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{kx}=k\cdot 1=k.$$

Ответ. k

д) **Найти** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{0\cdot\infty\}$ в этом случае, нужно произведение преобразовать в частное, то есть неопределенность $\{0\cdot\infty\}$ свести к неопределенности $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ или $\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}$.

$$\lim_{x\to 1}(1-x)tg\frac{\pi x}{2}=\{0\cdot\infty\}=\lim_{x\to 1}(1-x)\frac{\sin\frac{\pi x}{2}}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left[\sin\frac{\pi x}{2}=1, при\ x=1\right]=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=$$

$$=\begin{bmatrix} y=x-1, \\ y\to 0, x=y+1\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\frac{\pi}{2}(y+1)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{\cos\left(\frac{\pi}{2}y+\frac{\pi}{2}\right)}=\lim_{y\to 0}\frac{-y}{-\sin\frac{\pi}{2}y}.$$

Выделяем первый замечательный предел, то есть, умножаем числитель и знаменатель на $\frac{\pi}{2}$. Получаем,

$$\lim_{y\to 0}\frac{-\frac{\pi}{2}y}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}y}=\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Ответ. $\frac{2}{\pi}$.

е) **Найти** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^x=\{1^\infty\}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{x-1}{x+1}-1\right)\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{-2}{x+1}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x+1}{-2}}\right]^{\frac{x+1}{-2}}\right)^{\frac{-2}{x+1}x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x}{x+1}}=e^{-2}.$$

Ответ. e^{-2}.

ж) **Найти** $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Для раскрытия неопределенности $\{1^\infty\}$ в этом случае, нужно выделить второй замечательный предел: $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\begin{bmatrix} y=x-2, \\ x=y+2, y\to 0\end{bmatrix}=\lim_{y\to 0}(3(y+2)-5)^{\frac{1}{y}}=\lim_{y\to 0}(1+3y)^{\frac{1\cdot 3}{y\cdot 3}}=e^3.$$

Ответ. e^3.

Найти $\lim\limits_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}$.

Решение. Подставим значение $x=\dfrac{5}{2}$ в функцию, стоящую под знаком предела. Получим,

$$\lim_{x\to 5/2}(3x-5)^{\frac{1}{x-2}}=\left(3\cdot\frac{5}{2}-5\right)^{\frac{1}{5/2-2}}=\left(\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}.$$

Ответ. $\dfrac{25}{4}$.

2. Задана функция $y=2^{\frac{1}{x-3}}$ и два значения аргумента $x_1=3, x_2=1$.

Требуется:

- **найти пределы функции при приближении к каждому из данных значений x слева и справа;**
- **установить является ли данная функция непрерывной или разрывной для каждого из данных значений x;**
- **сделать схематический чертеж.**

Решение. Найдем левый и правый пределы в точке $\mathrm{x}_0 = 3$.

$$\lim_{x\to 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0-0} 2^{\frac{1}{t}} = 0,$$

$$\lim_{x\to 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \begin{bmatrix} t = x-3, \\ x \to 3+0, t \to 0+0 \end{bmatrix} = \lim_{t\to 0+0} 2^{\frac{1}{t}} == \infty.$$

Левый предел конечен и равен 0, а правый предел бесконечен. Следовательно, по определению $\mathrm{x}_0 = 3$ точка разрыва второго рода.

Найдем левый и правый пределы в точке $x_0 = 1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\lim\limits_{x\to 1+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = 2^{\frac{1}{-2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $y(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, т.е. $x_0 = 1$ точка непрерывности функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$.

Сделаем схематический чертеж.

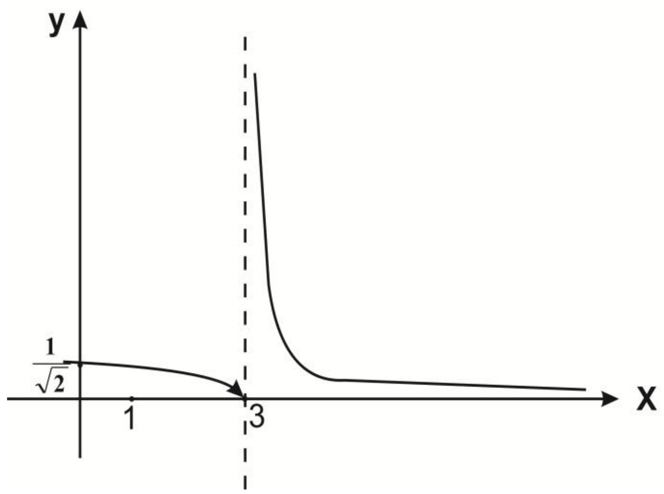


Рис. 1

3. Функция задается различными аналитическими выражениями для различных областей независимой переменной.

Требуется:

1) найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) сделать схематический чертеж.

$$y = \begin{cases} x-1, \ x<0, \\ x^2-1, \ 0 \le x \le 1, \\ 2, \ x>1. \end{cases}$$

Решение. Функция $y_1 = x-1$ непрерывна для $x<0$, функция $y_2 = x^2-1$ непрерывна в каждой точке из $[0,1]$, функция $y_3 = 2$ непрерывна в каждой точке интервала $(1,\infty)$.

Точки, в которых функция может иметь разрыв, это точки $x=0$ и $\boldsymbol{x=1}$, где функция меняет свое аналитическое выражение.

Исследуем точку $x=0$.

$\lim\limits_{x\to 0-0} y = \lim\limits_{x\to 0-0}(x-1) = -1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} y = \lim\limits_{x\to 0+0}(x^2-1) = -1$, $y(0) = -1$. Таким образом, точка $\boldsymbol{x=0}$ есть точка непрерывности функции $y(x)$.

Исследуем точку $x=1$.

$\lim\limits_{x\to 1-0} y = \lim\limits_{x\to 1-0}(x^2-1) = 0$, $\lim\limits_{x\to 1+0} y = \lim\limits_{x\to 1+0} 2 = 2$, $y(1) = 1-1 = 0$. Таким образом, односторонние пределы существуют, конечны, но не равны между собой. По определению, исследуемая точка – точка разрыва первого рода. Величина скачка функции в точке разрыва $x=1$ равен $d = \left|\lim\limits_{x\to 1+0} y - \lim\limits_{x\to 1-0} y\right| = |2-0| = 2$.

Сделаем схематический чертеж

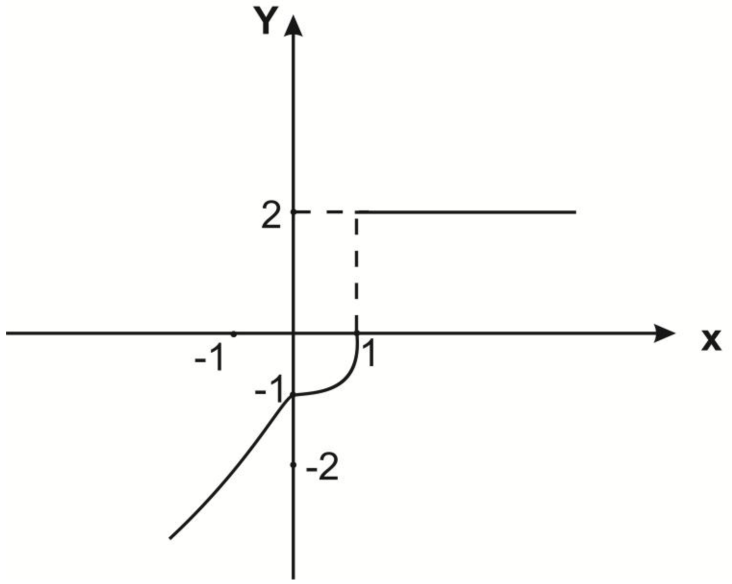


Рис. 2

Контрольная работа №1.
Вариант 1

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{9x^5-4x^4+2}{3x^5-2x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$; $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{2x^2-11x+5}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+4}-3}{\sqrt{2x-1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg3x}{4x}$;д) $\lim\limits_{x\to-\pi}\dfrac{\sin 2x}{x(\pi+x)}$;

е) $\lim\limits_{x\to-2}(5+2x)^{\frac{3}{x+2}}$

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$$y=e^{\frac{1}{x-7}},\ x_1=7,\ x_2=0.$$

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}x+4, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2+2, & \text{если} \quad -1\le x<1,\\ 2x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 2

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2-13x-7}{x^2-9x+14}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}2x\cdot ctg5x$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)tgx$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+4x-1}\right)^{-3x^2}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\ln(x-8)$, $x_1=7, x_2=8$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}\cos x, & \text{если} \quad x<0,\\ 1-x, & \text{если} \quad 0\le x\le 2,\\ x^2, & \text{если} \quad x>2.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 3

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-3x^2+2}{5x^4-3x-2}$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$; $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{3x^2-40x+128}{x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{4x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{10x-3}{10x+1}\right)^{5x}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=e^{\frac{1}{x-2}}$, $x_1=2, x_2=1$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-x, & \textit{если} \quad x\le 0,\\ -(x-1)^2, & \textit{если} \quad 0<x<2,\\ x-3, & \textit{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 4

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{2x^3+10x^2+5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to -\frac{4}{3}}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{1+x}-3}{2-\sqrt[3]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x}{\pi^2-x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4}(4x-11)^{\frac{5x}{x-3}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x-4}{x^2+x-20}$, $x_1=4, x_2=-5$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}\sin x, & \textit{если} \quad x<0,\\ x^2, & \textit{если} \quad 0\le x\le 2,\\ 0, & \textit{если} \quad x>2.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 5

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+2}{5x^4+8x-6}$;

б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$; $\lim\limits_{x\to10}\dfrac{5x^2-51x+10}{x-10}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2-5x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos\frac{\pi x}{2}}{1-\sqrt{x}}$;

е) $\lim\limits_{x\to-1}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to0}(2x+3)^{\frac{1}{x+1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=5^{\frac{1}{11-x}}$, $x_1=11$, $x_2=3$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x+2, & \text{если} \quad x\le -1,\\ x^2+1, & \text{если} \quad -1<x\le 1,\\ -x+3, & \text{если} \quad x>1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 6

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-3x^2+1}{3x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-5x-3}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{\sqrt{2x-1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 8x}{2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{tg3x}{tgx}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3x^2-6x+7}{3x^2+20x-1}\right)^{1-x}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=arctg\left(\dfrac{1}{x+9}\right)$, $x_1=-9$, $x_2=-8$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-x^2, & если \quad x\le 0,\\ tgx, & если \quad 0<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ 2, & если \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 7

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{3x^3+10x^2+4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-6x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{xtg\,2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tg\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)tg\,2x$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{13x+2}{13x-15}\right)^{x+7}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{13x+2}{13x-15}\right)^{x+7}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.
$y=\ln(x-7)$, $x_1=7, x_2=5$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x+1, & \text{если} \quad x\le 0, \\ (x+1)^2, & \text{если} \quad 0<x\le 2, \\ -x+4, & \text{если} \quad x>2. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 8

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x-2}{5x^3+3x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{5}}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{5x^2-16x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{\sqrt{x-2}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{5x^2+8x-2}{5x^2+3x+3}\right)^{4x+1}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=x+\dfrac{x+3}{x^2+3x}$, $x_1=-3,\ x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x, & \text{если} \quad x<0, \\ x^2+1, & \text{если} \quad 0\le x<1, \\ 3-x, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 9

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3+(x-1)^3}{x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x^2+5x-2}{2x^2+3x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{2x+1}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\pi-2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to -1}(2x+3)^{\frac{4x-2}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)^{\frac{4x-2}{x+1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=arctg\,\dfrac{1}{3-x}$, $x_1=3, x_2=2$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-\sin x, & \text{если} \quad x<0,\\ x^2, & \text{если} \quad 0\le x<1,\\ 2x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 10

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2}{\sqrt{x^8+3x+4}}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-8}{2x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{\sqrt{5+x}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg\,5x}{\arcsin 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\,\pi x}{x+2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2x-1}{5x+4}\right)^{x/2}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=e^{\frac{1}{x+5}}$, $x_1=-5$, $x_2=1$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x+1, & \text{если} \quad x<-2, \\ -x^2+2, & \text{если} \quad -2\le x<1, \\ 2+x, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 11

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(3x-4)(x+1)}{x^3+x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$; $\lim\limits_{x\to0,5}\dfrac{4x^2-8x+3}{2x^2-7x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\pi-x}$;

е) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to0}(2-x)^{\frac{4x+5}{x-1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x+2}{x^2-25}$, $x_1=5, x_2=-5$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-1, & \text{если} \quad x<-1, \\ -2, & \text{если} \quad -1\le x<0, \\ \cos x, & \text{если} \quad x\ge0. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 12

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+2)^2-(x-2)^2}{x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{5x^2-2x-39}{-x^2-2x+15}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} 3x\,ctg\,9x$;

д) $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)ctg\dfrac{\pi x}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{6x-7}{6x+5}\right)^{3x-6}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\ln(x+7),\ x_1=-7,\ x_2=-10$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}2x, & \text{если}\quad x\le 1,\\ (x-1)^2, & \text{если}\quad 1<x<3,\\ 2-2x, & \text{если}\quad x\ge 3.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 13

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+3x}{2x^2-3x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+x-12}{3x-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-5}-2}$

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 7x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x-tgx}{\sin^3 x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$; $\lim\limits_{x\to1}x\left(\ln(2x-1)-\ln(2x+1)\right)$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{2-2x}{x^3-x^4}$, $x_1=1$, $x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-x, & \text{если} \quad x\le-\dfrac{\pi}{4},\\ tgx, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ x, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 14

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-3)^2-(x+3)^2}{(x+2)^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+8}{x^2-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{4x+1}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{tg^2 8x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 4x-\cos 6x}{\sin^2 5x}$;

е) $\lim\limits_{x\to 1}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(4-3x)^{\frac{x}{x-1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=x+\dfrac{x+2}{x^2-4}$, $x_1=-2, x_2=1$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-4, & \text{если} \quad x<-1, \\ x^2, & \text{если} \quad -1\le x<1, \\ x+4, & \text{если} \quad x\ge 1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 15

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-3x}{2x^2+6x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-1}{3x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{\sqrt{x-5}-1}{36-x^2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x-\sin3x}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x\sin2x}$;

е) $\lim\limits_{x\to1}(6-7x)^{\frac{x+5}{2x-2}}$; $\lim\limits_{x\to0}(6-7x)^{\frac{x+5}{2x-2}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=e^{\frac{1}{x+1}}$, $x_1=-1$, $x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}\sin x, & \text{если} \quad x<-\pi,\\ \cos x, & \text{если} \quad -\pi\le x<\pi,\\ 1, & \text{если} \quad x\ge\pi.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 16

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^4}{x^2+2}-x^2\right)$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$; $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+x-1}{x^2-6x-7}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{x^2-49}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos 5x)\cdot ctg^2 3x$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x^2}{x-2}$, $x_1=2, x_2=1$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-x-1, & \text{если} \quad x<0,\\ (x+5)^2, & \text{если} \quad 0\le x<3,\\ 1-x, & \text{если} \quad x\ge 3.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 17

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2-3x+1}{3x^2+x+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$; $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+x-12}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to -8}\dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2xtg\,2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-x-2}\right)^x$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x+1}{x}$, $x_1=2, x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}4, & \text{если} \quad x<-\pi,\\ \cos x, & \text{если} \quad -\pi\le x<0,\\ 0, & \text{если} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 18

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-2x+1}{2x^2+x-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{1-\sqrt[3]{1+x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg^2 4x}{1-\cos 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(5-2x)^{\frac{6x+2}{3x-6}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(5-2x)^{\frac{6x+2}{3x-6}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x-3}{x^2-4}$, $x_1=2,\ x_2=-2$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-x+3, & \text{если} \quad x<-2,\\ x^2-1, & \text{если} \quad -2\le x<1,\\ 2-4x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 19

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-x^2-2x}{x^2+4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{x+4}-1}{x+3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to \pi/2}\dfrac{\sqrt{1-\sin x}}{2x-\pi}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to 1}(3-x)^{\frac{4x}{x-2}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=arctg\dfrac{1}{x-2}$, $x_1=2, x_2=3.$

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-1, & \text{если} \quad x\le -\dfrac{\pi}{4},\\ tgx, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{4}<x\le\dfrac{\pi}{4},\\ x^2, & \text{если} \quad x>\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 20

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+1}{2x^4+x+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to-5}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-25}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x^2-1}-\sqrt{x+x^2-3}}{x^2-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to3}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^x$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{4x}{x+3}$, $x_1=3, x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}-4x, & \text{если} \quad x<-1,\\ -(x-1)^2, & \text{если} \quad -1\le x<1,\\ 4x, & \text{если} \quad x\ge 1.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 21

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(5x-4)(2x+2)}{5x^3+2x^2+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-3x+1}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{1-\sqrt{2-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg\,2x}{\sin 5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to1}(1-x)tg\,\dfrac{\pi x}{2}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+2}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-2x+2}\right)^x$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x+1}{x^2+x^3}$, $x_1=-1,\ x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}1+x, & \text{если} \quad x<-1,\\ x^2, & \text{если} \quad -1\le x<0,\\ \sin x, & \text{если} \quad x\ge 0.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 22

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+4}{2x^3+5x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3-27}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{1-x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sin(\pi(x+2))}$;

е) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$; $\lim\limits_{x\to 3}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x}{x-x^3}$, $x_1=1, x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} 2x+4, & \textit{если} \quad x<1, \\ 3x^2, & \textit{если} \quad 1\le x<3, \\ x-2, & \textit{если} \quad x\ge 3. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 23

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-4x^3-2}{5x^3+3x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-7x+3}{x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{x+5}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} x\,ctg\,\dfrac{5x}{2}$;

д) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{arctg(x+2)}{x^2-4}$;

е) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{8}{x-3}}$; $\lim\limits_{x\to 4}(3x-8)^{\frac{8}{x-3}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{x-1}{2x^2-x-1}$, $x_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{2}$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x+3, & \text{если} \quad x<-\pi, \\ \sin x, & \text{если} \quad -\pi\le x<0, \\ 0, & \text{если} \quad x\ge 0. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 24

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-4x^2+1}{3x^5-9x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$; $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+10x+12}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x-1}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arcsin 2x}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\sin x}{\sec x-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$; $\lim\limits_{x\to2}\left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x-1}\right)^{-x^2}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=arctg\,\dfrac{1}{x}$, $x_1=1, x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-3, & \text{если} \quad x<0, \\ x^2-1, & \text{если} \quad 0\le x<1, \\ x+6, & \text{если} \quad x\ge1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 25

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^2+1}{3x^5-x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$; $\lim\limits_{x\to -7}\dfrac{x^2+x-56}{x^2-49}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{2-\sqrt[3]{8-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{1-\cos\sqrt{x}}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0,5}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$; $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x-1}}}$, $x_1=1, x_2=2$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}\cos x, & \text{если} \quad x<0,\\ x-1, & \text{если} \quad 0\le x<2,\\ 2, & \text{если} \quad x\ge 2.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 26

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^4-3x^5+1}{4x^5-2x+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{3-\sqrt{7+x}}{x-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{tgx^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0} ctgx^2(1-\cos x)$;

е) $\lim\limits_{x\to2}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$; $\lim\limits_{x\to3}(2x-3)^{\frac{x^2}{x-2}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.

Требуется.

1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;

2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;

3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\ln(1+2x)$, $x_1=-\dfrac{1}{2}$, $x_2=-2$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.

Требуется.

1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;

2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;

3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}4-x, & \text{если} \quad x\le0,\\ (x+3)^2, & \text{если} \quad 0<x<2,\\ 2x, & \text{если} \quad x\ge2.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 27

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-2x+1}{2x^4+x^3-3}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4-4x^2+3}{x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{\sqrt{2x-2}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 7x-1}{\sin^2 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x-tg^2 x}{x^4}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$; $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^2}{1-x}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$$y=x+\frac{x-5}{x^2-25},\ x_1=5,\ x_2=0.$$

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}2-x, & \text{если} \quad x\le-\dfrac{\pi}{4},\\ tgx, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{4}<x\le0,\\ 0, & \text{если} \quad x>0.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 28

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+1)^3-(x-1)^3}{x^3+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{x^2+2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$;

е) $\lim\limits_{x\to-2}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$; $\lim\limits_{x\to0}(4x+9)^{\frac{5-x}{2+x}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=arctg\dfrac{1}{x-6}$, $x_1=7, x_2=6$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases} x-1 & \textit{если} \quad x<-1, \\ x^2+3 & \textit{если} \quad -1\le x<1, \\ -2x & \textit{если} \quad x\ge1. \end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 29

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-4x^2-2}{3x^3+x^2+4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$; $\lim\limits_{x\to -0{,}5}\dfrac{2x^2-x-1}{3x^2+x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{x^2+\pi x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{tg\left(2\pi\left(x+1/2\right)\right)}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$$y=3^{\frac{1}{1-x}},\ x_1=1,\ x_2=0.$$

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}0, & \text{если} \quad x<-\dfrac{\pi}{2},\\ \cos x, & \text{если} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le x<\pi,\\ 2, & \text{если} \quad x\ge\pi.\end{cases}$$

Контрольная работа №1.
Вариант 30

1. Вычислить пределы функций.

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-4x^2+6}{x^3-4x^4+4x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-7}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$; $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+4x-21}{x+7}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

г); $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x\cdot\sin x}{1-\cos x}$

д) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin 2x}{tg^2 3x}$;

е) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$; $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3x^3+1}{3x^3+x^2-3}\right)^{2x+1}$.

2. Дана функция $y=f(x)$ и два значения аргумента x.
Требуется.
1)Найти значение функции при стремлении аргумента к каждому из данных значений x;
2) Определить, является ли функция непрерывной или разрывной при данных значениях x;
3) Сделать схематический чертеж в окрестности точек x_1 и x_2.

$y=\dfrac{3}{x^2-2x}$, $x_1=2, x_2=0$.

3. Для кусочно-заданной функции $y=f(x)$.
Требуется.
1) Найти точки разрыва функции, если они существуют;
2) Найти скачок функции в каждой точке разрыва;
3) Сделать схематический чертеж.

$$y=\begin{cases}x+2, & \text{если} \quad x<0,\\ -x^2+1, & \text{если} \quad 0\le x\le 1,\\ x+5, & \text{если} \quad x>1.\end{cases}$$

ТЕМА 2 Производная и дифференциал

1. Производная.
2. Дифференциал.
3. Производные и дифференциалы высших порядков.
4. Свойства дифференцируемых функций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бугров *Я.С.,* Никольский СМ. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
2. Пискунов Н.С Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. -М.: Интеграл - Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. - 8-е изд.-М.: Физматлит. т. 1 - 2001. -697 с.
4. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
5. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. - 5-е изд., перераб. и доп. -М.: Дрофа. Т.1. - 2003.-703 с.
6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. - 6-е изд. стер. -М. Физматлит, 2002, -646 с.
7. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта

Пример 1.
Найти производные заданных функций

а) $y = 4x^3 + 3\sqrt{x} - \dfrac{2}{x^2}$;

Решение:

$$y = 4x^3 + 3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-2};$$

$$y' = 4\cdot 3x^2 + 3\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 2(-2)x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-3} = 12x^2 + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3}.$$

б) $y = \sin x \cdot e^x$;

Решение:
Используем формулу $(u\cdot v)' = u'v + uv'$.

$$y' = (\sin x)' \cdot e^x + \sin x \cdot (e^x)' = \cos x \cdot e^x + \sin x \cdot e^x.$$

в) $y = \dfrac{x^2}{\cos x}$;

Решение:

Используем формулу $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$y' = \frac{(x^2)' \cos x - x^2 (\cos x)'}{(\cos x)^2} = \frac{2x \cos x + x^2 \sin x}{\cos^2 x}.$$

г) $y = \sin(x^2 + 3)$;

Решение:

Используем формулу $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$.

$y = \sin u$, где $u = x^2 + 3$;

$$y' = (\sin u)'_u \cdot u' = \cos u \cdot 2x = \cos(x^2 + 3) \cdot 2x.$$

д) $y = (x^2 + e^x)^{10}$;

Решение:

Используем формулу $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$.

$y = u^{10}$, где $u = x^2 + e^x$;

$$y' = 10u^9 \cdot (x^2 + e^x)' = 10(x^2 + e^x)^9 \cdot (2x + e^x).$$

е) $y = x^2 \cdot e^{\sin x}$;

Решение:

$$y' = (x^2)' e^{\sin x} + x^2 (e^{\sin x})' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} (\sin x)' = 2xe^{\sin x} + x^2 e^{\sin x} \cos x.$$

Пример 2.

Найти y':

а) $y^2 + 2x^2 y - x^2 = 0$.

Решение:

Функция $y = y(x)$ в примере задана неявно. Чтобы найти ее производную продифференцируем обе части равенства по x, полагая, что y есть функция от x и обозначая производную y через y':

$$2yy' + 4x \cdot y + 2x^2 y' - 2x = 0.$$

Выразим из полученного равенства y':

$$(2y + 2x^2) y' = 2x - 4xy;$$

$$y' = \frac{2x - 4xy}{2y + 2x^2}.$$

б) $\cos y = 4y^2 + e^x$.

Решение:

Аналогично предыдущему примеру:

$-\sin y \cdot y' = 8yy' + e^x$;

$(-\sin y - 8y)y' = e^x$;

$$y' = \frac{-e^x}{\sin y + 8y}.$$

в) $\begin{cases} x = t^2 + 3, \\ y = \cos t. \end{cases}$

Решение:

Используем формулу $y' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.

$$y' = \frac{(\cos t)'}{(t^2 + 3)'} = \frac{-\sin t}{2t}.$$

Пример 3.

Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

а) $y = \ln(\cos x)$;

Решение:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos x} \cdot (\cos x)' = \frac{-\sin x}{\cos x} = -tgx;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y'' = (-tgx)' = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

б) $y = xe^x$.

Решение:

$y' = e^x + xe^x$,

$y'' = e^x + e^x + xe^x = 2e^x + xe^x$.

Пример 4.

Найти дифференциал функции y, если $y = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$.

Решение:

Воспользуемся свойством логарифма частного для упрощения формулы:

$y = \ln(\sin x) - \ln x$.

Используем формулу $dy = y' \cdot dx$.

$$y' = \frac{1}{\sin x}(\sin x)' - \frac{1}{x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{1}{x} = ctgx - \frac{1}{x};$$
$$dy = \left(ctgx - \frac{1}{x} \right) dx.$$

Пример 5.

Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3 - 4x^2 + 8$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

Решение:

Найдем ординату точки касания:

$y_0 = x_0^3 - 4x_0^2 + 8 = 1^3 - 4 \cdot 1^2 + 8 = 5.$

Угловой коэффициент касательной равен значению производной в точке x_0:

$k = y'(x_0) = (x^3 - 4x^2 + 8)'\big|_{x=1} = (3x^2 - 4 \cdot 2x)\big|_{x=1} = -5.$

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение касательной $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$:

$y = 5 - 5(x-1) = -5x + 10,$

получили уравнение касательной $y = -5x + 10$.

Подставляем значения x_0, y_0 и $y'(x_0)$ в уравнение нормали $y = y_0 - \dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$:

$y = 5 - \dfrac{1}{-5}(x-1) = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{24}{5},$

получили уравнение нормали $y = \dfrac{1}{5}x + \dfrac{24}{5}$.

Контрольная работа №2.
Вариант 1

1. Найти производные

а) $y = 3x^2 + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + 3$,

б) $y = \sin x \cdot arctg\ x$,

в) $y = \frac{\cos x}{x - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \sqrt[3]{\frac{1}{x^2 + 1}}$,

д) $y = \frac{1}{3} tg^3 x - tgx + x$,

е) $y = \arccos \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}$,

ж) $y = (1 + \ln \sin x)^2$,

з) $y = 2^{\frac{1}{\ln x}}$,

и) $y = x\ arctg\sqrt{x}$,

к) $y = e^{\sin x}$,

л) $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$,

м) $y = ctg\ e^x$.

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $x^3 + arctg(e^y) + y(x - 1) = 0$,

б) $\sin y = x + 3y$,

в) $\begin{cases} x = 2t - t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$y = x \cos 2x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln \frac{tgx}{\sqrt{x}}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 2

1. Найти производные

а) $y = 4x^5 - \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{1}{x^3} - \sqrt[3]{3}$,

б) $y = \sqrt{x}\sin x$,

в) $y = \dfrac{tgx}{\sin x - \cos x}$,

г) $y = ctg(2x\sin\dfrac{1}{2})$,

д) $y = (\arccos x + \arcsin x)^2$,

е) $y = arctg\ln(2x+3)$,

ж) $y = tg\dfrac{e^x}{x}$,

з) $y = \sin 3x\cos 5x$,

и) $y = \ln(1+\sqrt{x^2-1})$,

к) $y = tg^2 6x - 2^x$,

л) $y = x\cdot 10^{\sqrt{x}}$,

м) $y = x + e^{\sin x}$,

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $y\sin x = \cos xy$,

б) $x^3 + y^2 - 3axy = 0$,

в) $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \sqrt{1+x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arcsin\dfrac{\ln x}{x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = 4x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 3

1. Найти производные

а) $y = x^{10} - 2\sqrt{x} - \dfrac{1}{x} + \sqrt[4]{2}$,

б) $y = e^{x} tgx$,

в) $y = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x} - 1}$,

г) $y = tg\,\dfrac{x+1}{2}$,

д) $y = x\arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$,

е) $y = \ln(1 - 2x)$,

ж) $y = \sin 2^{x} + 3^{\sin x}$,

з) $y = \dfrac{1}{x^2}\ln x$,

и) $y = arctg\ \ x \cdot \ln x$,

к) $y = e^{-x^2}$,

л) $y = 10^{xtgx}$,

м) $y = \sin 3x \cos 5x$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $e^{x-y} = \dfrac{x}{y}$,

б) $\sin xy = x^2 y$,

в) $\begin{cases} x = 2t^3 + t, \\ y = \ln t. \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \ln(tg\, x)$

4. Найти дифференциал функции:

$y = arctg\,\dfrac{\sin x}{x}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - 4x + 4$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 4

1. Найти производные

а) $y = 7x^4 - \sqrt[7]{x^2} - \dfrac{1}{x^4} + \sqrt{7}$,

б) $y = e^x ctgx$,

в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + 7}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$,

г) $y = \cos x - \dfrac{1}{3}\sin 2x$,

д) $y = \dfrac{x-1}{\ln x}$,

е) $y = x^2 e^x$,

ж) $y = tg^2 6x - e^{\frac{1}{x}}$,

з) $y = \ln \dfrac{\sin x}{\cos 2x}$,

и) $y = x \arcsin \dfrac{2x-1}{5}$,

к) $y = (e^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + e^{2x})$,

л) $y = \dfrac{1}{arcctg\ e^x}$,

м) $y = 3x^3 \arcsin x + (x^2 + 2)\sqrt{x}$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $x^2 y = \arcsin yx$,

б) $e^{x+y} = xy$,

в) $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x^2 a^x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arcsin 2^{x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 + 4x$ в точке с абсциссой $x = -2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 5

1. Найти производные

а) $y = 8x^3 - 3\sqrt[5]{x^4} - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt[3]{3}$,

б) $y = xarctgx$,

в) $y = \dfrac{x}{\sin x}$,

г) $y = tg\sqrt{x} + \dfrac{1}{ctg(2x-1)}$,

д) $y = \ln\dfrac{x}{e^x}$,

е) $y = \arcsin\sqrt{x} \cdot \ln x$,

ж) $y = x^2 10^{-x+2}$

з) $y = arctg(x^2 - 3x + 1)$,

и) $y = \arcsin x \cdot 9^{-x}$,

к) $y = ctg\dfrac{\ln x + 1}{2 - \ln x}$,

л) $y = (1 + \sqrt{1+x})^2$

м) $y = \cos^3\sqrt{e^x}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\arcsin\dfrac{x}{y} - yx = 0$,

б) $2x^2 + x = y^3$,

в) $\begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 2t^2. \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = tg\ln\left(x^3 + 2\right)$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 + 4x^2 - 1$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 6

1. Найти производные:

а) $y = x^{10} - 3\sqrt[3]{x^7} + \frac{1}{x^2} - \sqrt[3]{10}$

б) $y = e^x \arcsin x$

в) $y = \frac{e^x}{\cos x}$

г) $y = 3\sin(3x-1)$

д) $y = (1-2\sqrt[3]{x})^2$

е) $y = \frac{1}{4} tg^4 x + \frac{1}{2} tg^2 x$

ж) $y = \frac{1-\ln x}{1+\ln 2x}$

з) $y = 10^{1-\sin 2x}$

и) $y = \arcsin\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}$

к) $y = \sin^2 2x \cos\frac{x}{2}$

л) $y = 3^{arctg 3x}$

м) $y = \ln\frac{e^x - e^{-x}}{2}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\frac{y}{x} = arctg(xy)$

б) $x - 3y + e^y = 5$

в) $\begin{cases} x = \ln\frac{t^2-1}{4} \\ y = \sin t \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \ln\sin x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arcsin\sqrt{1-2x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 2x - 2$ в точке (0; - 2).

Контрольная работа №2.
Вариант 7

1. Найти производные:

а) $y = 10x^5 - \dfrac{1}{4x^4}$

б) $y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} \sin x$

в) $y = \dfrac{tgx}{\sqrt{x}}$

г) $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$

д) $y = \ln(1 - ctgx)$

е) $y = e^{-x} + 10^{\ln x}$

ж) $y = arctg \dfrac{1+x}{1-x}$

з) $y = \sin^2 3x \cos^3 2x$

и) $y = \arcsin e^x + \arccos \dfrac{1}{2^x}$

к) $y = tg 3^{\ln x}$

л) $y = x\sqrt{\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2}}$

м) $y = arctgx^2 - \ln \sin x$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $xy = \ln\left(e^{x+y} - 2\right)$

б) $tg(y-1) = x + y^2$

в) $\begin{cases} x = arctg\, t \\ y = \sqrt{t^2+1} \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{x^3}{x-1}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = tg\left(x^3 + \sqrt{x}\right)$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = -x^2 - 2x + 1$ в точке (2; -7).

Контрольная работа №2.
Вариант 8

1. Найти производные:

а) $y = 7x^5 - 2\sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$

б) $y = \sqrt[3]{x} \cos x$

в) $y = \dfrac{\sin x}{\cos x + 1}$

г) $y = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$

д) $y = (arctgx + x)^2$

е) $y = tg5x \sin 7x$

ж) $y = \cos^2 2x \sin^2 3x$

з) $y = (1 + \arcsin x)^2$

и) $y = \dfrac{10^x + 10^{-x}}{2x}$

к) $y = \ln(x^2 - 4x)$

л) $y = ctg(\ln 2x)$

м) $y = e^{\sin x + \cos x}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $e^x tgy - x^2 + y^3 = 0$

б) $\cos x + e^{4y} = 9$

в) $\begin{cases} x = \ln \dfrac{\sin t - 1}{2} \\ y = \arcsin t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{\ln x}{x}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = 2^{xtgx}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - x - 1$ в точке (1; -1).

Контрольная работа №2
Вариант 9

1. Найти производные:

а) $y = 3x^{12} + 4\sqrt[3]{x^7} - \dfrac{1}{x^2} + \sqrt[4]{10}$

б) $y = (\sqrt{x} - 4)\sin x$

в) $y = \dfrac{e^x}{arctgx}$

г) $y = \sin(3x - 5)$

д) $y = e^{x^2-3} tgx$

е) $y = \ln\dfrac{\sin x}{\sqrt{x-1}}$

ж) $y = arctg\sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

з) $y = e^x tg\, \dfrac{e^x}{\sqrt{x^4 - 1}}$

и) $y = \sin^2 x^2$

к) $y = 3^{\ln(x+1)}$

л) $y = \dfrac{\arcsin(\ln x)}{\ln(\arcsin x)}$

м) $y = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\dfrac{x}{y} = \arcsin xy$

б) $arctgy = xy$

в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = \dfrac{1}{t^2 - 5} \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = x\sqrt{1 + x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arcsin\dfrac{x^3}{x^2 + 2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 - x + 1$ в точке (-1; 1).

Контрольная работа №2.
Вариант 10

1. Найти производные:

а) $y = 7x^3 + \frac{1}{2x^2} + \sqrt{x + \sqrt[3]{5}}$

б) $y = (x^3 + 1)\sin x$

в) $y = \frac{\cos x}{\sqrt{x}}$

г) $y = \frac{tgx}{\sin x + 3}$

д) $y = 2^{x + \sin x}$

е) $y = \arccos \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

ж) $y = \ln(tg^2 2x)$

з) $y = e^{-\sqrt{x} + x}$

и) $y = arctg(e^{x+2})$

к) $y = \sin^2 x^2$

л) $y = arctg\sqrt[3]{x^2 - 2}$

м) $y = x^4 e^{\sqrt{x^2+4}}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\ln y = \cos xy - 7$

б) $x^2 y^2 - ctgy + 3 = 0$

в) $\begin{cases} x = e^{2t} \\ y = \ln \sin t \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \cos(arctg \frac{x}{2})$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 4x + 3$ в точке (1; 0).

Контрольная работа №2.
Вариант 11

1. Найти производные:

а) $y = 5x^7 + \sqrt[6]{x^5} - \dfrac{1}{x^3} + \sqrt[3]{3}$

б) $y = (\sqrt[3]{x} + 1)arctgx$

в) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt[5]{x} - x}$

г) $y = arcctg(4x^2 + 1)$

д) $y = \sin^3 x + 2\sin x + x^3$

е) $y = \arcsin \dfrac{x+1}{x}$

ж) $y = 3^{arctg(x^2+1)} + \sqrt{2}$

з) $y = \cos \ln(x^2 + 1)$

и) $y = x \ arc\sin ctg\sqrt{x}$,

к) $y = 2^{\sin x}$,

л) $y = \dfrac{e^x + 2e^{-x}}{4}$,

м) $y = tg(\cos x)$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $x^4 + y^4 = x^2 y^2$

б) $e^x \sin y - e^{-y} \cos x = 0$

в) $\begin{cases} x = \ln(1 + t^2) \\ y = t - arctgt \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = x\sin 3x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln \dfrac{\cos x}{\sqrt{x^2}}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = -x^2 - 2x + 5$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 12

1. Найти производные:

а) $y = 4x^9 - \sqrt[7]{x^3} + \dfrac{1}{x^4} - \sqrt[7]{2}$

б) $y = e^x arctgx$

в) $y = \dfrac{ctgx}{x - x^3}$

г) $y = \sin(\dfrac{x}{x^2 + 1})$

д) $y = (arctgx + e^x)^2$

е) $y = \log_2 \dfrac{x+1}{\sqrt{3}}$

ж) $y = \arcsin(tg^2 x)$

з) $y - \log_2(x^2 + 4x - 2)$

и) $y = \ln(3 - \sqrt{x^2 + 1})$,

к) $y = ctg^2 7x + (\sqrt{7})^x$,

л) $y = x^6 \cdot 2^{\sqrt{x}}$,

м) $y = x + 5e^{tgx}$,

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $2y \ln y = x$

б) $x \ + \ln y - x^2 e^y \ = 0$

в) $\begin{cases} x = e^{-t} \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \sqrt{1 - 3x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arccos \dfrac{\ln x}{x^4}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = -x^3 - 3x$ в точке с абсциссой $x = -2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 13

1. Найти производные:

а) $y = 9x^5 - 7\sqrt[3]{x^8} + \dfrac{3}{x^8} - 2\sqrt[4]{5}$

б) $y = \sqrt{x}\cos x$

в) $y = \dfrac{arctgx}{e^x - \sin x}$

г) $y = \log_7 \sin x$

д) $y = \sqrt{1 - \sin x} + 2$

е) $y = 2^{\log_3 x}$

ж) $y = arctg\,\dfrac{3 - x}{x - 2}$

з) $y = e^{arctgx^2}$

и) $y = \arcsin\ \ x \cdot \lg x$,

к) $y = 3^{-x^2}$,

л) $y = 2^{xctgx}$,

м) $y = \sin x \cos 2x$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = x + y$

б) $x^2 \sin y + 2x - y + 1 = 0$

в) $\begin{cases} x = \ln t \\ y = t^2 - \sin t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \ln(ctg\ x)$

4. Найти дифференциал функции:

$y = arcctg\,\dfrac{\cos x}{x}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 + 4x - 12$ в точке с абсциссой $x = 1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 14

1. Найти производные:

а) $y=-7x^3+2\sqrt[5]{x^3}+\dfrac{4}{x^8}-3\sqrt[3]{4}$

б) $y=e^x ctgx$

в) $y=\dfrac{2\sqrt[3]{x}-1}{\arcsin x}$

г) $y=\log_5(\sqrt[3]{x}+2x)$

д) $y=(\sin x+\sqrt[3]{x^2})^2$

е) $y=\log_2 \sin x$

ж) $y=\sin\dfrac{\ln x}{x}$

з) $y=e^{\sqrt[4]{2-3x}}$

и) $y=x\arccos\dfrac{2x+1}{9}$,

к) $y=(e^{\sqrt{x}}-2)(1+e^{3x})$,

л) $y=\dfrac{1}{arctg\;\;2^x}$,

м) $y=2x^3\arcsin x-(x^3-1)\sqrt{x}$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $y=1+xe^y+\sin e^y$

б) $x^4-6x^2y^2+9y^4+15y^2=0$

в) $\begin{cases} x=\ln t+\sin t \\ y=t^2\cos t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y=x^4 3^x$

4. Найти дифференциал функции:

$y=\arccos 5^{x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^3-3x-1$ в точке с абсциссой $x=2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 15

1. Найти производные:

а) $y=-5x^4-3\sqrt[4]{x^5}+\dfrac{5}{x^7}-\sqrt[5]{6}$

б) $y=e^x arcctgx$

в) $y=\dfrac{e^x}{arcctgx}$

г) $y=\sin(5x^2+1)$

д) $y=\ln(1+2\sin x)$

е) $y=arctg\ln x$

ж) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{1-3x}}{x}$

з) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$

и) $y=3^{-x}\arccos x$,

к) $y=tg\dfrac{\ln x}{2-x}$,

л) $y=(1-2\sqrt{1+x})^3$

м) $y=\sin^4\sqrt{e^x}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $x=\sin(xy)+arctgy$

б) $y\ arctg\ y-\arcsin x=0$

в) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \\ y=tarcctg\ t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y=\dfrac{2x}{\sqrt{1+x^2}}$

4. Найти дифференциал функции:

$y=ctg\ln\left(x^4-1\right)$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=-x^2+2x-3$ в точке с абсциссой $x=1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 16

1. Найти производные:

а) $y = -3x^6 + 5\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{2}{x^7} - \sqrt[5]{6}$

б) $y = \sin x \log_7 x$

в) $y = \dfrac{tgx}{\sin x - \sqrt[3]{x^2}}$

г) $y = \cos(\log_6 x)$

д) $y = \sin x^2 + \ln(x^2 + 4)$

е) $y = \ln \arcsin x$

ж) $y = (e^{\cos x} + 3)^2$

з) $y = \log_7 (x - \sin 7x)$

и) $y = x\ \ arctg\sqrt{x^3}$,

к) $y = 2^{\sin x}$,

л) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$,

м) $y = arcctg\ \ e^x$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\sin(xy) + \cos(xy) = 0$

б) $e^{xy} - y^2 = 0$

в) $\begin{cases} x = \sin t + \cos t \\ y = a^t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = 3x^2 \cos 4x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln \dfrac{tgx}{\sqrt{2x^2}}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 + 2x$ в точке с абсциссой $x = -2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 17

1. Найти производные:

а) $y=-6x^8-4\sqrt[9]{x^5}-\dfrac{7}{x^6}+3\sqrt[8]{3}$

б) $y=\sqrt[5]{x}\log_2 x$

в) $y=\dfrac{arcctgx}{\log_3 x}$

г) $y=arcctg\cos x$

д) $y=\ln(\sin x+2)$

е) $y=ctg\dfrac{x+3}{3x}$

ж) $y=\ln\sin(2x+5)$

з) $y=\sin(3-tg^2x)$

и) $y=\ln(1+\sqrt{x^2+5})$,

к) $y=tg^2 3x-3^x$,

л) $y=x\cdot 7^{\sqrt{x}}$,

м) $y=x-4e^{\sin x}$,

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $y=x^2+arctgy$

б) $y^2+5x=5^x-\sin y$

в) $\begin{cases} x=t^2\cos t \\ y=t^2\sin t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y=\sqrt{8-x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y=\arcsin\dfrac{e^x}{3x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^3-4x-2$ в точке с абсциссой $x=1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 18

1. Найти производные:

а) $y = 8x^3 - \sqrt[5]{x^6} + \dfrac{6}{x^9} - 4\sqrt[9]{5}$

б) $y = arcctgx \ \ \log_3 x$

в) $y = \dfrac{\log_7 x}{x^3 + x^2}$

г) $y = tg\,\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

д) $y = arctg(e^{2x}) + x$

е) $y = \sin(e^x + 2)$

ж) $y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$

з) $y = tge^{2x+1}$

и) $y = arctg \ \ 2x \cdot \ln 4x$,

к) $y = e^{-2x^3}$,

л) $y = 2^{xtgx}$,

м) $y = tg3x\cos 5x$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $x^2 + xy - (y+1)^2 = 0$

б) $\sin(y - x^2) - 3 = 0$

в) $\begin{cases} x = \cos t + t\sin t \\ y = \sin t - t\cos t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \log_2(\sin x)$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arcsin\dfrac{\ln x}{x}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^3 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x = 2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 19

1. Найти производные:

а) $y = -12x^4 + 2\sqrt[6]{x^7} - \dfrac{3}{x^7} + 7\sqrt[3]{2}$

б) $y = \sin x \arcsin x$

в) $y = \dfrac{\sin x}{\ln x + \sqrt{x}}$

г) $y = \arcsin(x^2 + x)$

д) $y = \arccos\sqrt{1-3x}$

е) $y = \sin^4 x + \ln^2 x$

ж) $y = \sin^2 x \;\; arcctg^2 x$

з) $y = \arcsin^4(\cos x)$

и) $y = x^2 \cos\dfrac{2x+1}{2}$,

к) $y = (2^{-\sqrt{x}} + 1)(1 + 3^{2x})$,

л) $y = \dfrac{1}{arctg\;\; e^x}$,

м) $y = 3x^3 \arcsin 2x + (x^2 + 2)\sqrt{x^3}$.

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $y - x = \arcsin x - \arcsin y$

б) $x^2 + y^2 \ln x - 4 = 0$

в) $\begin{cases} x = \sin t \cos^2 t \\ y = -\cos^3 t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = 2x^2 7^x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = arctg 6^{x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y = x^2 - 3x - 8$ в точке с абсциссой $x = -1$.

Контрольная работа №2.
Вариант 20

1. Найти производные:

а) $y=-4x^7+3\sqrt[7]{x^3}+\dfrac{4}{x^3}-2\sqrt[5]{3}$

б) $y=\arccos x\ \ ctgx$

в) $y=\dfrac{x\sqrt{x}+x^2}{x+x^2}$

г) $y=\log_3 ctgx$

д) $y=3^{\arcsin x}$

е) $y=e^{\sin x+x^2}$

ж) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$

з) $y=\sin^7 e^{2x}$

и) $y=3^{-2x}\arcsin x$,

к) $y=tg\,\dfrac{x}{2-\ln x}$,

л) $y=3(1+\sqrt{1-x})^3$

м) $y=\cos^3\sqrt{e^{3x}}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $y\sin x-\cos(x-y)=0$

б) $\dfrac{y}{x}+e^{\frac{y}{x}}=0$

в) $\begin{cases} x=\sin^3 t \\ y=\cos^3 t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y=\dfrac{x+2}{\sqrt{1+x^2}}$

4. Найти дифференциал функции:

$y=tg\lg\left(x^3-1\right)$

5. Составить уравнения касательной и нормали к линии $y=x^2-3x$ в точке с абсциссой $x=-2$.

Контрольная работа №2.
Вариант 21

1. Найти производные:

а) $y = x^7 - 3\sqrt[4]{x^7} + \frac{1}{x^5} - \sqrt[3]{13}$

б) $y = e^x arctgx$

в) $y = \frac{4^x}{\sin x}$

г) $y = 3\cos(3x - 1)$

д) $y = (7 - 2\sqrt[3]{x^2})^6$

е) $y = \frac{1}{5} ctg^5 x + \frac{1}{7} ctg^7 x$

ж) $y = \frac{3 - \ln 4x}{3 + \ln 6x}$

з) $y = 14^{1 - \arcsin 6x}$

и) $y = \arccos\sqrt{1 - 3x^2} + \frac{1}{\sqrt{7}}$

к) $y = \sin^8 3x \cos\frac{x}{7}$

л) $y = 7^{\arccos 7x}$

м) $y = \ln\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\ln\frac{y}{x} = x - \sin y$

б) $x^4 - 3y + 2^y = 6$

в) $\begin{cases} x = \dfrac{t+1}{t^4} \\ y = \dfrac{4}{t^2} + \dfrac{1}{3t} \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \lg\cos 3x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arccos\sqrt{1 - 5x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 - 2x + 1$ в точке (1; -2).

Контрольная работа №2.
Вариант 22

1. Найти производные:

а) $y = 12x^6 - \dfrac{2}{3x^3}$

б) $y = 2\cos x(x^2 - 1)$

в) $y = \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

г) $y = \dfrac{\sin x}{2 - \cos x}$

д) $y = \ln(2 + \sin x)$

е) $y = 4^x + 10^{-\ln x}$

ж) $y = \arcsin \dfrac{2 - x}{2 + x}$

з) $y = \sin^3 2x \cos^2 4x$

и) $y = arctge^x + arcctg \dfrac{1}{5^x}$

к) $y = ctg\, 4^{\ln x}$

л) $y = x^2 \sqrt{\dfrac{\sqrt{x} + 7}{\sqrt{x} - 3}}$

м) $y = arctgx^3 + \ln\cos x$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $x + \sqrt{xy} = arctg \dfrac{x}{y}$

б) $\arccos x - 4y^2 = 5$

в) $\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^{-t} \sin t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{x}{x^2 - 4}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = ctg\left(x^4 + \sqrt{x^3}\right)$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 3x + 3$ в точке (2; 1).

Контрольная работа №2.
Вариант 23

1. Найти производные:

а) $y = 7x^8 - 6\sqrt[4]{x} + 7$

б) $y = \sqrt[5]{x}\sin x$

в) $y = \dfrac{\cos x}{\sin x + 2}$

г) $y = \dfrac{1}{\cos^3 5x}$

д) $y = (\arcsin x + x)^5$

е) $y = arctg\,4x\,\sin 8x$

ж) $y = \cos^7 4x\,\sin^2 8x$

з) $y = (3 + \arccos x)^7$

и) $y = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{x}$

к) $y = \ln(x^3 - 5x^2)$

л) $y = cg(\ln 7x)$

м) $y = e^{2\sin x + 8\cos x}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\arcsin xy = 2^{x+y} - 5$

б) $\cos(y+5) = 2x + y^3$

в) $\begin{cases} x = \sin t + t \\ y = \sqrt{t^3 + 1} \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = 4^{x\sin x}$

5. Составить уравнение касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 3x - 3$ в точке (2; -1).

Контрольная работа №2
Вариант 24

1. Найти производные:

а) $y = 4x^{17} + 4\sqrt[5]{x^8} - \dfrac{1}{x^9} + \sqrt[4]{19}$

б) $y = (\sqrt{x^3} - 7)tgx$

в) $y = \dfrac{e^{3x}}{\arcsin x}$

г) $y = \cos(2x - 6)$

д) $y = e^{x-3} ctgx^2$

е) $y = \ln \dfrac{\arccos x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

ж) $y = arctg\sqrt{x} + \dfrac{2}{\sqrt[9]{x^8}}$

з) $y = 7^x tg\, \dfrac{6^x}{\sqrt{x^3 - 9}}$

и) $y = \sin^3 x^5$

к) $y = 5^{\ln x - 4}$

л) $y = \dfrac{\ln(\arcsin x)}{\arccos(\ln x)}$

м) $y = \log_5(x^4 + \sqrt{x+1})$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $e^x \sin y - x^2 y^3 = 0$

б) $\cos\dfrac{x}{y} + 3^{4y} = 0$

в) $\begin{cases} x = \sqrt[3]{t} \\ y = arctgt \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = (1 - x^2)\sqrt{x}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = arctg\, \dfrac{x^5}{x+2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 + 6x + 5$ в точке (-1; 0).

Контрольная работа №2.
Вариант 25

1. Найти производные:

а) $y = 3x^7 + \dfrac{1}{3x^4} + \sqrt{2x + \sqrt[3]{5}}$

б) $y = \cos x(1 + \dfrac{6}{\sqrt{x^3}})$

в) $y = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$

г) $y = \dfrac{\sin x - 6}{ctgx}$

д) $y = 4^{x + \cos x}$

е) $y = \arcsin \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$

ж) $y = \ln(tg^3 4x)$

з) $y = 2^{-\sqrt{x^3} + 5x}$

и) $y = arcctg\,(e^{4-x})$

к) $y = \cos^7 x^5$

л) $y = arctg\sqrt[4]{x^5 - 7}$

м) $y = e^{\sqrt{x+2}} \arccos x^4$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\arccos\dfrac{x}{y} = x + 4y$

б) $xtgy = x + y^2$

в) $\begin{cases} x = \ln^3 t \\ y = \sin(t+1) \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = x\arccos x + \sqrt{1 - x^2}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = arctg\sqrt[3]{1 + 5x^2}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 4x - 1$ в точке (0; -1).

Контрольная работа №2.
Вариант 26

1. Найти производные:

а) $y = x^{15} - 3\sqrt[5]{x^2} + \dfrac{6}{x^5} - \sqrt{34}$

б) $y = 2^x arctg\, 4x$

в) $y = \dfrac{\sin x}{\log_4 x}$

г) $y = 2\cos(4x - 1)$

д) $y = (7 - 3\sqrt[8]{x^7})^4$

е) $y = \dfrac{1}{4}\sin^4 x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

ж) $y = \dfrac{\ln 7x}{\ln x + 3x}$

з) $y = 7^{1-\cos 4x}$

и) $y = arctg\sqrt{1 + x^3} + \dfrac{1}{\sqrt{7}}$

к) $y = \sin^5 7x \cos^6 \dfrac{x}{8}$

л) $y = 5^{\arcsin 3x}$

м) $y = \ln\dfrac{2^x - 3x}{6}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $xarctgy = xy + 2$

б) $x^4 + y^4 = e^{x+y}$

в) $\begin{cases} x = \ln(\cos t + 1) \\ y = \sin t + t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \sin\ln x$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \sin(arcctg\,\dfrac{x}{3})$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 8x + 15$ в точке (2; 3).

Контрольная работа №2.
Вариант 27

1. Найти производные:

а) $y = 7x^5 - \frac{1}{2x} + \sqrt{3}$

б) $y = 5^x (1 - \frac{6}{\sqrt[13]{x^8}})$

в) $y = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sin x}$

г) $y = \frac{\cos x}{4 - tgx}$

д) $y = \ln(2 + \sin x)$

е) $y = e^{-2x} + 5^{\ln x}$

ж) $y = \arcsin \frac{1 - x}{1 + x}$

з) $y = \cos^2 5x \sin^3 2x$

и) $y = arctge^x + \arccos \frac{1}{5^x}$

к) $y = ctg 5^{\ln x}$

л) $y = \sqrt{\frac{x - 4}{x - 1} tgx}$

м) $y = arctg 2x^3 - \cos \ln x$

2. Найти $\frac{dy}{dx}$:

а) $\frac{y}{x} = e^{xy} + \cos y$

б) $2^x + 2^y = 2^{x+y}$

в) $\begin{cases} x = \arccos t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

3. Найти $\frac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \frac{x^2 + 6}{tgx}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \ln\left(x^3 + \sqrt[4]{x}\right)$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 8x - 13$ в точке (1; -6).

Контрольная работа №2
Вариант 28

1. Найти производные:

а) $y = 5x^7 - 3\sqrt[5]{x} + \sqrt{7}$

б) $y = \sqrt[3]{x^2}\, tgx$

в) $y = \dfrac{\sin x + 3}{\cos x}$

г) $y = \dfrac{1}{\ln^2 2x}$

д) $y = (\cos x + x)^5$

е) $y = arctg 5x \cos 4x$

ж) $y = \sin^7 2x \cos^2 6x$

з) $y = (3 + \arccos x)^4$

и) $y = \dfrac{8^x}{3x + 8^{-x}}$

к) $y = \arcsin(x^3 - 6x)$

л) $y = \ln(tg 3x)$

м) $y = 7^{\cos x - 3\sin x}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $\log_2 \dfrac{x}{y} = \sin\left(x^2 + y^3\right)$

б) $ctgy + x^2 - y = 9$

в) $\begin{cases} x = arcctgt \\ y = \ln(1 + t^2) \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$:

$y = \dfrac{\arcsin x}{2x}$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \arccos \sqrt[3]{x^2 + 6x}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 5x + 6$ в точке (2; 0).

Контрольная работа №2
Вариант 29

1. Найти производные:

а) $y = 7x^{19} + 2\sqrt[3]{x^5} - \dfrac{1}{x^7} + \sqrt[5]{16}$

б) $y = (\sqrt{x} - 4)\cos x$

в) $y = \dfrac{\sin e^x}{\sqrt[3]{x}}$

г) $y = arctg(5x - 8)$

д) $y = e^{x^4 - 7} \arccos x$

е) $y = \ln \dfrac{\sqrt{\sin x}}{x^2}$

ж) $y = tg\sqrt{x^3} + \dfrac{2}{\sqrt{x}}$

з) $y = 2^x arctg \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{x^3 - 1}}$

и) $y = \cos^7 3x^5$

к) $y = 2^{\log_2 x + 3}$

л) $y = \dfrac{\arcsin(\ln 9x)}{\sqrt{x + \sin x}}$

м) $y = \ln(7x + \sqrt{x^3 - 1})$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

а) $e^x \sin y + e^y \cos x = 5$

б) $ctg(y + 6) = x^5 + 2y^2$

в) $\begin{cases} x = tg\, t + 1 \\ y = \sin^2(t - 4) \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

$y = xarctgx + 4$

4. Найти дифференциал функции:

$y = \sqrt{\cos(\ln x)}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = -x^2 + 5x - 7$ в точке (3; -1).

Контрольная работа №2.
Вариант 30

1. Найти производные:

   а) $y = x^7 + \dfrac{1}{9x^3} + \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{5}}$

   б) $y = (\dfrac{1}{\sqrt{x}} + 2)tgx$

   в) $y = \dfrac{\sqrt[5]{5x}}{\sin\sqrt{x}}$

   г) $y = \dfrac{\cos x - 3}{\sin 8x}$

   д) $y = 7^{x+ctgx}$

   е) $y = arctg\sqrt{\dfrac{x+1}{\sqrt{x}}}$

   ж) $y = \log_2(tg^4 7x)$

   з) $y = e^{\sqrt{x}+\arcsin x}$

   и) $y = \arccos(e^{\sqrt{x-9}})$

   к) $y = \ln^6 x^6$

   л) $y = \arcsin\sqrt[7]{x^2+5}$

   м) $y = \dfrac{tg\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

2. Найти $\dfrac{dy}{dx}$:

   а) $\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{y^3} = \sqrt[4]{4}$

   б) $\arccos^2 xy + \sin y = 1$

   в) $\begin{cases} x = ctgt \\ y = t\cos t + \sin t \end{cases}$

3. Найти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$:

   $y = \sqrt{x+1}\ln(x+1)$

4. Найти дифференциал функции:

   $y = arctg\dfrac{x}{x^2+5}$

5. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^2 - 2x - 5$ в точке (3; -2).

ТЕМА 3. Исследование функций.

1. Функция, основные свойства.
2. Наибольшее и наименьшее значение функции, заданной на ограниченном промежутке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

8. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб.для вузов:в 3т.-5-е изд.,стер.-М.:Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник).т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление.-2003.-509 с.
9. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
10. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Учеб. для вузов: в 3-х томах. – 8-е изд.-М.: Физматлит. т.1 – 2001. -697 с.
11. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. -22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003.-432 с.
12. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Учеб. для вузов: В 3-х томах. – 5-е изд., перераб. и доп. –М.: Дрофа. Т.1. – 2003.-703 с.
13. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Учеб. для вузов в 2-х частях. – 6-е изд. стер. –М. Физматлит, 2002, -646 с.
14. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд..-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.

Решение типового варианта контрольной работы

Пример 1.

Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 3x - x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$.

Решение. Функция достигает наибольшего и наименьшего значения либо в критических точках, принадлежащих заданному отрезку, либо на концах этого отрезка. Найдем критические точки (т.е. точки в которых производная равна нулю или не существует):

$y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$

$y' = 0$ при $x = 1 \in [0;\ 3]$ и $x = -1 \notin [0;\ 3]$

Найдем значение функции в этих точках и на концах отрезка

$y(1) = 2;\ \ y(0) = 0;\ y(3) = -18$

Выберем из предложенных значений наибольшее и наименьшее.

Итак, наибольшее значение функции на заданном отрезке равно 2 и достигается при $x = 1$, $y_{наиб}(1) = 2$, а наименьшее значение равно -18 при $x = 3$, $y_{наим}(3) = -18.$

Пример 2.

Исследовать функцию $y=\dfrac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}$ и построить ее график.

Решение.

Общая схема исследования функций:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать поведение функции на концах области определения. Найти точки разрыва функции и ее односторонние пределы в этих точках. Найти вертикальные асимптоты.
3. Выяснить, является функция четной, нечетной, периодической.
4. Найти точки пересечения графика функции с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.
5. Найти наклонные асимптоты графика функции.
6. Найти точки экстремума и интервалы возрастания и убывания функции.
7. Найти точки перегиба графика функции и интервалы его выпуклости и вогнутости.
8. Построить схематический график функции, используя все полученные результаты.

1. Функция не определена, если $x-1=0,\ (x=1)$

Область определения: $x\in(-\infty;1)\cup(1;\infty)$

2. Т.к. $x=1$- точка разрыва функции исследуем поведение функции в этой точке слева и справа

$$\lim_{x\to1-0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty,$$

$$\lim_{x\to1+0}\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}=+\infty$$

Т.к. пределы равны ∞ значит $x=1$ точка разрыва второго рода.
Следовательно, прямая $x=1$- вертикальная асимптота.

3. Проверим функцию на четность, нечетность. Напомним, что функция $y=f(x)$ называется четной (нечетной) если выполнены два условия:

1. Область определения симметрична относительно начала координат
2. $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$.

Если $y=f(x)$ четная, то график симметричен относительно оси ординат, а для нечетной – относительно начала координат.

$$f(-x)=\frac{(-x+2)^3}{4(-x-1)^2}=-\frac{(x-2)^3}{4(x+1)^2}$$

Функция не является ни четной, ни нечетной, т.е. общего вида.
Функция не является периодической

4. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат

с OX: $y=0$ при $x=-2$;

с OY: $x=0$ при $y=2$;

Найдем промежутки знакопостоянства функции

$$y<0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}<0 \Rightarrow x+2<0 \Rightarrow x\in(-\infty;\,-2);$$

$$y>0 \Rightarrow \frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}>0 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x\in(-2;1)\cup(1;+\infty)$$

5. Найдем наклонные асимптоты $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} \qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-kx\right]$$

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3}{4x(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\frac{1}{4};$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+2)^3}{4(x-1)^2}-\frac{1}{4}x\right]=\left[\infty-\infty\right]=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{(x+2)^3-x(x-1)^2}{(x-1)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+8-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=2$$

$y=\frac{1}{4}x+2-$ наклонная асимптота.

Для $x\to-\infty$ k и b вычисляются аналогично

6. Найдем точки экстремума функции и промежутки монотонности.

Возрастание и убывание функции $y=f(x)$ характеризуется знаком ее производной y': если в некотором интервале $y'>0$, то в этом интервале функция возрастает, а если $y'<0$, то функция убывает в этом интервале.

Функция $y=f(x)$ может иметь экстремум только в тех точках, которые принадлежат области определения и в которых ее производная равна нулю или не существует. Если y' меняет знак с “+” на “-” при переходе через исследуемую точку, то эта точка максимума, если y' меняет знак с “-” на “+” при переходе через исследуемую точку, то эта точка является точкой минимума. Если y' не меняет знак при переходе через точку x_0, в этой точке экстремума нет.

Найдем все точки из области определения функции $y=f(x)$, в которых производная (y') обращается в ноль или не существует.

$$y'=\frac{3(x+2)^2(x-1)^2-2(x-1)(x+2)^3}{4(x-1)^4}=\frac{(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^3}.$$

$y'=0$ при $x_1=-2,\ x_2=7$;

y' не существует при $x=1$

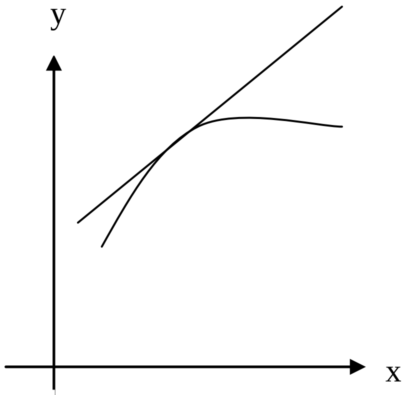
Составим таблицу

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 1)$	1	$(1; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	+	не существует	-	0	+
y	↗	0	↗	не существует	↘	≈ 5	↗
	возрастает		возрастает		убывает	min	возрастает

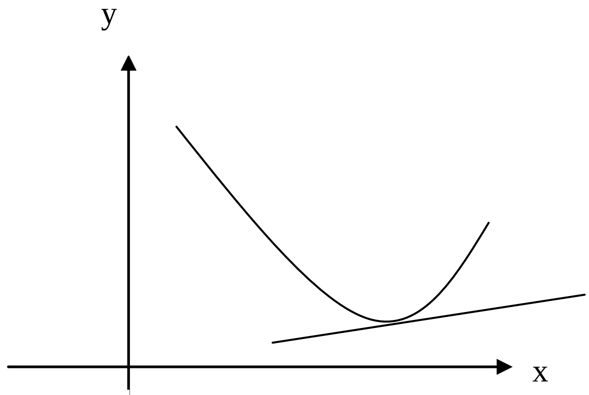
Функция возрастает на интервалах $(-\infty; -2)$, $(-2; 1)$, $(7; +\infty)$ и убывает на интервале $(1; 7)$. Точка $x = 7$ есть точка минимума $y_{\min} = y(7) = \dfrac{729}{144}$

7. Найдем точки перегиба и промежутки выпуклости и вогнутости функции

Напомним, что график функции $y = f(x)$ называется выпуклым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит ниже любой своей касательной. График функции $y = f(x)$ называется вогнутым на интервале $(a; b)$, если в каждой точке этого интервала график лежит выше любой своей касательной.



Выпуклый график



Вогнутый график

Точки, в которых функция меняет выпуклость на вогнутость или наоборот, называются точками перегиба.

Перегиб возможен в точках, в которых y'' равна нулю или не существует. Если $y'' < 0$ на интервале $(a; b)$, то график функции является выпуклым $(\cap)$ на этом интервале, если же $y'' > 0$, то на интервале $(a; b)$ график вогнутый $(\cup)$.

Найдем точки перегиба $y = f(x)$:

$$y'' = \frac{\left[2(x+2)(x-7) + (x+2)^2\right](x-1)^3 - 3(x-1)^2(x+2)^2(x-7)}{4(x-1)^6} = \frac{54(x+2)}{4(x-1)^4} = \frac{27(x+2)}{2(x-1)^4}$$

$y'' = 0$ при $x = -2$

y'' не существует при $x = 1$

Составим таблицу

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;1)$	1	$(1;+\infty)$
y''	-	0	+	не существует	+
y	$\cap$	0	$\cup$	не существует	$\cup$

Точка $(-2;\,0)$- точка перегиба.

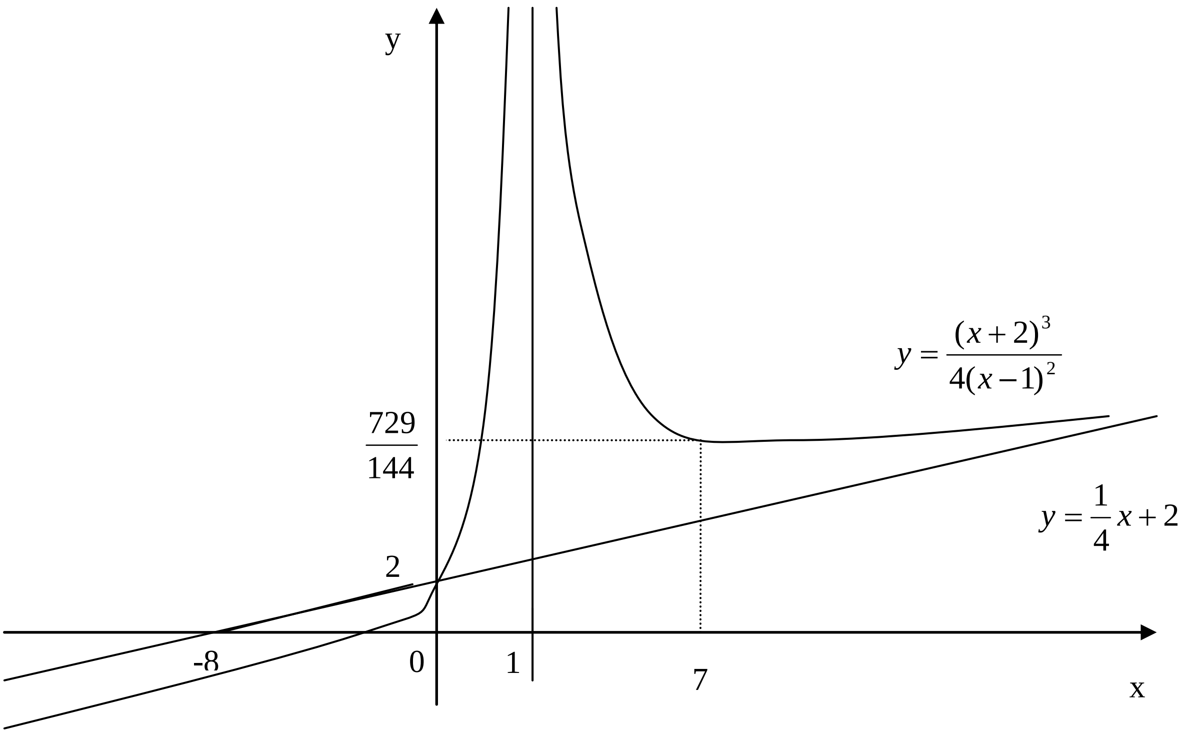
Дополнительные точки:

$y(-3)\approx -0{,}01$

$y(3)\approx 7{,}8$

$y(-6)\approx -0{,}3$

8. Построим график функции, используя результаты исследования.



Замечание:

При построении графика масштабы по оси OX и OY могут не совпадать.

Вариант 1

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \dfrac{x+6}{x^2+13}$; $[-5;5]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \dfrac{x}{(x-1)^2}$

Вариант 2

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \dfrac{x}{2} + \cos x$; $[0;\pi]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \dfrac{x^3+16}{x}$

Вариант 3

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \dfrac{x-3}{x^2+16}$; $[-5;10]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \dfrac{x^3-1}{4x^2}$

Вариант 4

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \dfrac{x+3}{x^2+7}$; $[-3;7]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \dfrac{x-1}{x^2-2x}$

Вариант 5

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \dfrac{x}{2} - \sin x$; $\left[-\dfrac{\pi}{2};\pi\right]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$

Вариант 6

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $$y=\frac{x}{x^2+16};\ [-3;7]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y=\frac{x^2+1}{x}$$

Вариант 7

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $$y=\frac{x}{\sqrt{2}}-\cos x;\ [-\pi;\pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$$

Вариант 8

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $$y=\frac{x-4}{x^2+6};\ [-4;6]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y=\frac{4x^2}{x^3-1}$$

Вариант 9

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $$y=\frac{\sqrt{3}}{2}x-\cos x;\ [-\pi;\pi]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y=\frac{x}{3+x^2}$$

Вариант 10

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $$y=\cos x-\frac{x}{\sqrt{2}};\ \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y=\frac{2x}{1+x^2}$$

Вариант 11

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = 3x + x^3 - 1 - 3x^2$; $[-1;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^3 + 3}{x}$$

Вариант 12

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = x^2 e^{-x} + \sqrt{3}$; $[-1;4]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 + 4}{x}$$

Вариант 13

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \frac{1}{2} + x^5 - \frac{5}{3}x^3$; $[0;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$$

Вариант 14

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \frac{x^2}{1 + x} - \sqrt{2}$; $[-\frac{1}{2};4]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x}{x^2 + 5}$$

Вариант 15

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = 2x^2 - \ln x + \frac{1}{2}$; $[\frac{1}{4};1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x - 8}{(x - 3)^3}$$

Вариант 16

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = 1 - 2x^2 + x^4$; $[-2;0]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x}{(x-2)^2}$$

Вариант 17

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \sin 2x - x - 2$; $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

Вариант 18

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 3$; $[-2;3]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{x+3}{2(x+2)^2}$$

Вариант 19

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}$; $[0;2]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

Вариант 20

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

$y = 3x^4 + 16x^3 + 9$; $[-3;1]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

$$y = \frac{16x^2}{x - 4}$$

Вариант 21

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:

   $y = x + \frac{1}{x^2}$; $[1;20]$

2. Исследовать функцию и построить ее график:

   $$y = \frac{2x+1}{(x+1)^2}$$

Вариант 22

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\sin 2x-x;\ [0;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{x}{3-x^2}$

Вариант 23

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\dfrac{x-1}{x^2+3};\ [-3;3]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{x}{x^2+2}$

Вариант 24

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\sqrt{3}x-2\sin x;\ [0;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{x^3}{3-x}$

Вариант 25

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\sin x-\dfrac{x}{2};\ \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{x}{3+x^2}$

Вариант 26

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\dfrac{1-x}{1+x};\ [-1;1]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{2x^3}{x-2}$

Вариант 27

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
   $y=\dfrac{x}{2}-\sin x;\ [-\pi;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
   $y=\dfrac{(x-1)^2}{x^2+1}$

Вариант 28

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
$y = \frac{x+4}{x^2-3}$; $[2;4]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
$y = \frac{x-1}{x^2+2}$

Вариант 29

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
$y = 2\cos x + \sqrt{3}x$; $[0;\pi]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
$y = \frac{x^3}{1-x^2}$

Вариант 30

1. Найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке:
$y = \cos x + \frac{\sqrt{3}x}{2}$; $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
2. Исследовать функцию и построить ее график:
$y = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

ТЕМА 4. Интегральное исчисление функции одной переменной.

При решении задач этой темы необходимо знать:

1. Определение и свойства неопределенного интеграла.
2. Таблицу основных интегралов.
3. Основные методы интегрирования.
4. Стандартные методы интегрирования наиболее часто встречающихся классов функций.
5. Определение, свойства и способы вычисления определенного интеграла.
6. Несобственные интегралы и их свойства.
7. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

Таблица основных интегралов

1 $\int dx = x + C;$

2 $\int x^k dx = \dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C, \quad k \neq -1;$

3 $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C;$

4 $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C;$ 4а $\int e^x dx = e^x + C;$

5 $\int \sin x\, dx = -\cos x + C;$

6 $\int \cos x\, dx = \sin x + C;$

7 $\int \dfrac{1}{x^2 + a^2} dx = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C;$

8 $\int \dfrac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \dfrac{x}{a} + C;$

9 $\int \dfrac{1}{x^2 - a^2} dx = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C;$

10 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln\left|\sqrt{x^2 \pm a^2} + x\right| + C;$

11 $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$

12 $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C;$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

15. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика: Учеб. для вузов: в 3т.-5-е изд., стер. - М.: Дрофа .- (Высшее образование. Современный учебник). Т.2. Дифференциальное и интегральное исчисление. - 2003. - 509 с.
16. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: Учеб. пособие. - 22-е изд., перераб.- СПб: Профессия, 2003. - 432 с.
17. Данко П.Е. и др. Высшая математика в упражнениях и задачах (с решениями): в 2 ч./ Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.-6-е изд.-М.: ОНИКС 21 век, ч.2. -2002.-416 с.
18. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление: Учеб. пособие: в 2-х т.- Изд. стер. –М.: Интеграл – Пресс. Т.1. -2001.- 415 с.
19. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике, 1 часть. – 2-е изд., испр. – М.: Айрис-пресс, 2002. – 288 с.: ил.

Образец решения варианта

Задание 1: Вычислить интеграл:

а) $\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx$**;**

б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}$;

в) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx$;

г) $\int 3^{2-7x}dx$;

д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$;

е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx$;

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx$;

з) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx$;

и) $\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx$;

к) $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx$;

л) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx$;

м) $\int x^2\cdot\cos x\,dx$;

н) $\int\arccos x\,dx$;

о) $\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$;

п) $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$;

р) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$;

с) $\int\frac{3x dx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$;

т) $\int\cos 3x\cos 5x dx$;

у) $\int\sin^4 x\,dx$;

ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}$;

Решение:

а) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной.

б) $$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l}t=1+2x;\\ dt=2dx;\\ dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

в) $$\int\frac{x^4}{\sin^2x^5}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^5\\ dt=5x^4dx\\ x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

г) $$\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{array}{l}t=2-7x,\\ dt=-7dx,\\ dx=-\frac{1}{7}dt\end{array}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

д) $$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{arctg}x\\ dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{array}\right|=\int tdt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x+C;$$

е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx=\left|\begin{matrix}t=e^x\\ dt=e^x dx\end{matrix}\right|=\int\sin t dt=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$$=-\cos t+C=-\cos e^x+C;$$

ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx=\left|\begin{matrix}t=x^2\\ dt=2xdx\\ xdx=\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$=\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2}+C;$$

з) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}dx=\left|\begin{matrix}t=e^x,\\ dt=e^x dx,\\ e^x dx=dt\end{matrix}\right|=\int\frac{dt}{\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$$=\ln\left|\sqrt{t^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}+t\right|+C=\ln\left|\sqrt{e^{2x}-7}+e^x\right|+C;$$

и) $\int\frac{\sin 5x\ dx}{9-\cos^2 5x}=\left|\begin{matrix}t=\cos 5x\\ dt=-5\sin 5x\,dx\\ \sin 5x\,dx=-\frac{1}{5}dt\end{matrix}\right|=\int\frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{t^2-3^2}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|+C=\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C=\frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right|+C;$$

к) $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx=\int\frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx=\left|\begin{matrix}t=\cos x^2\\ dt=-2x\sin x^2 dx\\ x\sin x^2 dx=-\frac{1}{2}dt\end{matrix}\right|=-\int\frac{\frac{1}{2}dt}{t}=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}=$

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$$=-\frac{1}{2}\ln|t|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right|+C;$$

л) $\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2+2^2}dx = \left| \begin{array}{l} t=3^x \\ dt = 3^x \ln 3 dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{array} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2}+C = \frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2}+C;$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям, используя формулу $\int U\cdot V'dx = U\cdot V - \int U'\cdot Vdx$ (**13**):

м) $\int x^2\cos x dx = \left| \begin{array}{l} U=x^2; \quad U'=2x \\ V'=\cos x;\ V=\sin x \end{array} \right| = x^2\sin x - \int 2x\cdot\sin x dx =$

$= \left| \begin{array}{l} U=2x; \quad U'=2 \\ V'=\sin x; \quad V=-\cos x \end{array} \right| == x^2\cdot\sin x - \left(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$

н) $\int \arccos x\, dx = \left| \begin{array}{l} U=\arccos x;\ U'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V'=1; \qquad V=x \end{array} \right| = x\cdot\arccos x - \int x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \left| \begin{array}{l} t=1-x^2 \\ dt=-2xdx \\ -xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{1/2}+C = \sqrt{1-x^2}+C$

в итоге получаем $\int \arccos x\, dx = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2}+C;$

о) $\int \frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx.$

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x-3} =$

$= \frac{A(x-2)(x-3)+Bx(x-3)+Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$

$= \frac{Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx}{x(x-2)(x-3)};$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2+3x+6 = Ax^2-5Ax+6A+Bx^2-3Bx+Cx^2-2Cx.$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} x^2:\ 1=A+B+C \\ x^1:\ \ 3=-5A-3B-2C \\ x^0:\ 6=6A \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases}1=1+B+C\\ 8=-3B-2C\\ A=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=1,\\ B=-8,\\ C=8.\end{cases}$$

Тогда $\dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{8}{x-2}+\dfrac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x}-\frac{8}{x-2}+\frac{8}{x-3}\right)dx=\int\frac{dx}{x}-8\int\frac{dx}{x-2}+8\int\frac{dx}{x-3}=:$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\ln|x|-8\ln|x-2|+8\ln|x-3|+C;$$

п) $\displaystyle\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2-x+1}=x^4+x^3-x-1+\frac{1}{x^2-x+1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int\left(x^4+x^3-x-1+\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\right)dx=\int x^4dx+\int x^3dx-\int xdx-\int 1dx+\int\frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдем с помощью формулы (**7**)}

$$=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\operatorname{arctg}\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=\frac{x^5}{5}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}-x+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$$

р) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left|\begin{array}{l} t=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2},\ \ \sin x=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \\ \dfrac{x}{2}=\operatorname{arctg}t,\ x=2\operatorname{arctg}t\Rightarrow dx=\dfrac{2dt}{1+t^2} \end{array}\right|$$

$$=\int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}-2\cdot\frac{2t}{1+t^2}\right)}=\int \frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}dt\,.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1+t^2}{t(t-1)(t-3)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t-1}+\frac{C}{t-3}=$$

$$=\frac{A(t-1)(t-3)+Bt(t-3)+Ct(t-1)}{t(t-1)(t-3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1+t^2=At^2-4At+3A+Bt^2-3Bt+Ct^2-Ct\,.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} t^2:\ 1=A+B+C \\ t^1:\ \ 0=-4A-3B-C \\ t^0:\ 1=3A \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-1, \\ C=\frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\frac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\frac{1}{3t}-\frac{1}{t-1}+\frac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

c) $\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2-2=t,\ dt=6xdx,\ 3xdx=\frac{1}{2}dt.$

Получим: $\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}=$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t=z^4 \\ dt=4z^3dz \\ z=\sqrt[4]{t} \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}}=2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz=2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz=2\int\frac{z}{z+1}dz=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz=2\int dz-2\int\frac{dz}{z+1}=$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$=2z-2\ln|z+1|+C=2\sqrt[4]{3x^2-2}-2\ln\sqrt[4]{3x^2-2}+C;$$

т) $\int \cos 3x \cos 5x dx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований $\cos 3x \cdot \cos 5x = \frac{1}{2}(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)) = \frac{1}{2}(\cos(-2x)+\cos 8x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 8x)$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (**6**), получим:

$$\int \frac{1}{2}(\cos 8x + \cos 2x)dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}(-\sin 8x) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(-\sin 2x) + C = -\frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

у) $$\int \sin^4 x\, dx = \int \left(\sin^2 x\right)^2 dx = \left\{\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\right\} = \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 dx =$$

$$= \int \frac{1-2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} dx = \left\{\cos^2 2x = \frac{1+\cos 4x}{2}\right\} = \frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x + \frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - 2\cdot\frac{1}{4}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos 4x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx == \frac{3}{8}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x dx =$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**6**)}

$$= \frac{3}{8}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + C;\,;$$

ф) $$\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}} =:$$

$$\left|\begin{array}{l} t = \sqrt{e^{2x}-1}, \\ e^{2x} = t^2+1, \\ x = \frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right), \\ dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right| = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t} = \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$= \mathrm{arctg}\, t + C = \mathrm{arctg}\sqrt{e^{2x}-1} + C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$; б) $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

Решение:

а) Несобственный интеграл I рода.

$$\int\limits_0^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}} = \left| \begin{array}{l} t = x^2+4 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \\ x_1 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 4 \\ x_2 = -\infty \Leftrightarrow t_2 = \infty \end{array} \right| = \int\limits_4^{\infty} \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \lim_{b\to\infty} \int\limits_4^{b} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$= \lim_{b\to\infty} \left(t^{\frac{1}{2}} \Big|_4^b \right) == \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{t} \Big|_4^b \right) = \lim_{b\to\infty} \left(\sqrt{b} - 2 \right) = \infty$$ - интеграл расходится.

б) Несобственный интеграл II рода.

$x = 4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int\limits_0^{4} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}} =$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin \frac{x}{4} \Big|_0^{4-\varepsilon} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\arcsin\left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right) - \arcsin 0 \right) = \frac{\pi}{2}$$ - интеграл сходится.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$;

б) длину дуги кривой:

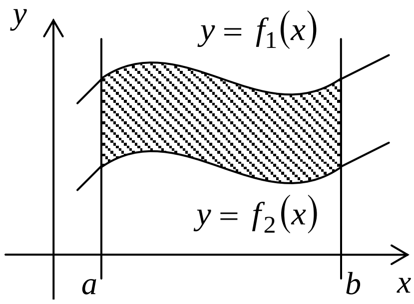
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi ,$$

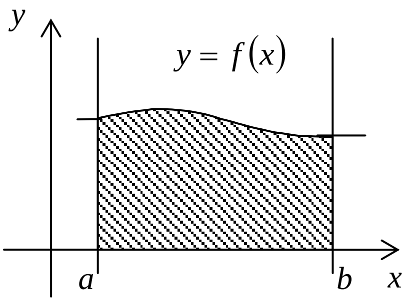
в) объем тела, полученного вращением фигуры $y = \sin x;\ \ y = 0;\ \ 0 \le x \le \pi$, вокруг оси Ox.

Решение:

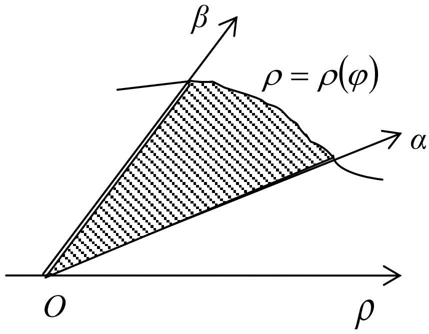
а) Существуют несколько формул для вычисления площадей плоских фигур.

- Площадь фигуры, заданной в декартовой системе координат, ограниченной линиями $y = f_1(x)$ - сверху, $y = f_2(x)$ - снизу, слева прямой $x = a$, справа прямой $x = b$ определяется формулой $S = \int\limits_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx$ (**14**);





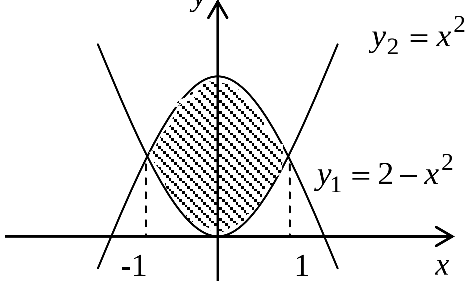
- Площадь фигуры, ограниченной кривой заданной параметрически уравнениями $(y = f(x),\ x \in [a; b]) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases} t \in [\alpha; \beta]$, определяется формулой $S = \int\limits_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt$ (**15**);



- Площадь фигуры, заданной в полярной системе координат, ограниченной кривой $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, определяется формулой: $S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta \rho^2(\varphi)d\varphi$ (**16**).

В нашем случае линии, ограничивающие фигуру, заданы в декартовых координатах, поэтому мы будем использовать формулу (**14**).

Найдем координаты точек пересечения линий: $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow$



$x^2 = 2 - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \Leftrightarrow$

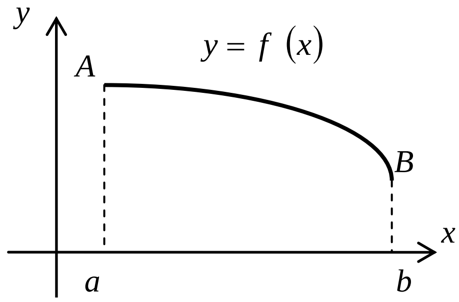
$x_1 = -1; \quad x_2 = 1 \Rightarrow a = -1; \quad b = 1.$

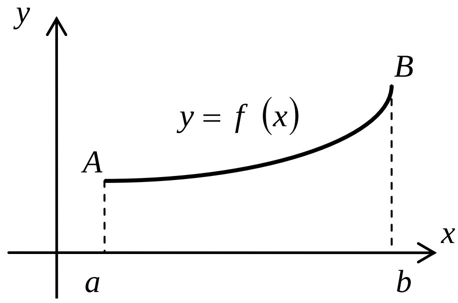
$$S = \int\limits_{-1}^{1}\left(\left(2 - x^2\right) - x^2\right)dx = \int\limits_{-1}^{1}\left(2 - 2x^2\right)dx = 2\int\limits_{-1}^{1}\left(1 - x^2\right)dx =$$

$$= 2\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 2\left(1 - \frac{1}{3} - \left(-1 - \frac{(-1)^3}{3}\right)\right) = \frac{8}{3};$$

б) В зависимости от способа задания уравнения кривой существуют следующие формулы нахождения длины дуги кривой.

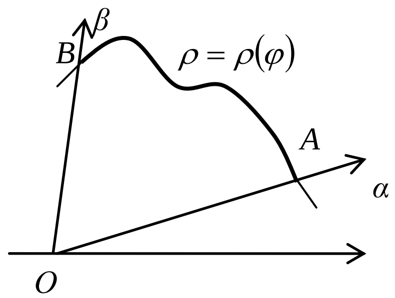
- Для кривой, заданной в декартовых координатах уравнением $y = f(x)$ $x \in [a;\, b]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$ (**17**);





- Для кривой, заданной параметрически уравнениями $\left(y = f(x),\, x \in [a;\, b]\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x(t); \\ y = y(t); \end{cases}$ $t \in [\alpha;\, \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}\, dt$ (**18**);

- Для кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $\varphi \in [\alpha;\, \beta]$ длина дуги находится по формуле $l_{AB} = \int\limits_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2(\varphi) + \left(\rho'(\varphi)\right)^2}\, d\varphi$ (**19**).



В нашем случае кривая задана параметрически, поэтому для вычисления её длины мы применим формулу (**18**).

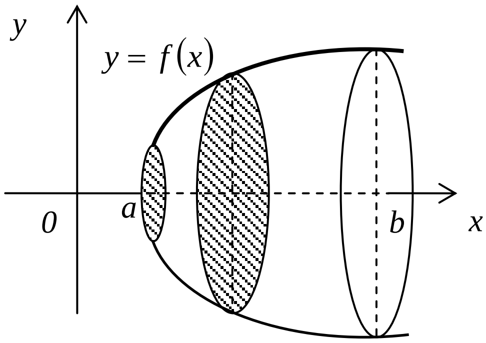
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t); \end{cases} \quad \begin{cases} x'(t) = 3(1 - \cos t), \\ y'(t) = 3 \cdot \sin t. \end{cases}$$

$$l = \int\limits_0^\pi \sqrt{\left(3(1 - \cos t)\right)^2 + (3 \sin t)^2}\, dt = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\, dt = \left\{\cos^2 t + \sin^2 t = 1\right\} =$$

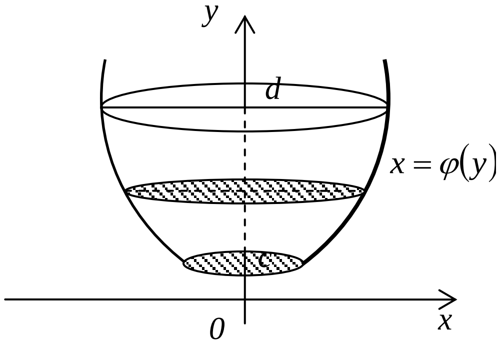
$$= 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2(1 - \cos t)}\, dt = \left\{1 - \cos t = 2\sin^2 \frac{t}{2}\right\} = 3\int\limits_0^\pi \sqrt{2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}\, dt =$$

$$= 6\int\limits_0^\pi \sin\frac{t}{2}\, dt = -6 \cdot 2\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^\pi = -12\left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos 0\right) = -12 \cdot (0 - 1) = 12\,;$$

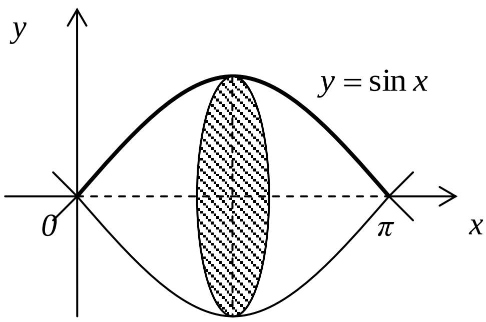
в) Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $x \in [a; b]$. Тогда объём тела, полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной сверху графиком функции $y = f(x)$, снизу Ox, определяется формулой: $V_x = \pi \int\limits_a^b f^2(x)dx$ (**20**).



Если криволинейная трапеция ограниченна графиком непрерывной функции $x = \varphi(y)$ и прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ $(c < d)$, то объём тела, образованного вращением этой трапеции вокруг оси Oy, по аналогии с формулой (20), равен: $V_y = \pi \int\limits_c^d \varphi^2(y)dy$ (**21**).



В условиях нашей задачи $y = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$.



$$V_x = -\pi \int\limits_0^\pi \sin^2 x dx = \left\{ \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \right\} =$$

$$= \pi \int\limits_0^\pi \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi}{2} \left(\int\limits_0^\pi dx - \int\limits_0^1 \cos 2x \, dx \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \left(x - \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2} \left(\left(\pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi \right) - \left(0 - \frac{1}{2} \sin 0 \right) \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} \cdot \pi = \frac{\pi^2}{2}.$$

Контрольная работа №4
Вариант 1.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2-2x+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$; в) $\int\frac{x^2}{\left(1+3x^3\right)^2}dx$;

г) $\int\frac{x}{1+3x^2}dx$; д) $\int\frac{\cos x}{1-2\sin x}dx$; е) $\int e^{-x^2}xdx$;

ж) $\int\sin 2x\,dx$; з) $\int\left(\cos\frac{x}{3}+1\right)dx$; и) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

к) $\int\frac{3^x}{3^{2x}+1}dx$; л) $\int\frac{dx}{x^2-2x+4}$; м) $\int xe^{-2x}\,dx$;

н) $\int x^2\ln x\,dx$; о) $\int\frac{2x-1}{x^2-3x+2}dx$; п) $\int\frac{x^4+2}{x^3+3x}dx$;

р) $\int\frac{dx}{1+3\cos x}$; с) $\int\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$; т) $\int\sin x\cos 2xdx$;

у) $\int\cos^2 x\,dx$; ф) $\int\left(e^x+2\right)^3dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x\ln^3 x}$; б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y=\frac{x^2}{2}-x+1$ и $y=-\frac{x^2}{2}+3x+6$;

б) длину дуги кривой: $y=\ln x$ от точки с абсциссой $x_1=\frac{3}{4}$ до точки $x_2=2{,}4$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси OY фигуры, ограниченной гиперболой $y=\frac{6}{x}$, осью OY и прямыми $y=1$ и $y=6$.

Контрольная работа №4
Вариант 2.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{2}{x^3}-11\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}};$ в) $\int\frac{xdx}{\left(5x^2+1\right)^2};$

г) $\int 7^x\sqrt{3\cdot 7^x+4}dx;$ д) $\int\frac{x^2}{1+3x^3}dx;$ е) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+4}dx;$

ж) $\int\sin 5x\,dx;$ з) $\int\frac{dx}{1+3x^2};$ и) $\int tg3x\,dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+4x^2}};$ л) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x-3};$ м) $\int(x+3)e^{2x}dx;$

н) $\int x\arccos x\,dx;$ о) $\int\frac{3x^2-1}{x^3-x}dx;$ п) $\int\frac{x^3+1}{x^2-4}dx;$

р) $\int\frac{dx}{2-2\sin x};$ с) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$ т) $\int\cos 3x\sin 2xdx;$

у) $\int\sin^4 x\cdot\cos x^5\,dx;$ ф) $\int\sqrt{e^x+1}dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}};$ б) $\int\limits_0^\infty\frac{xdx}{x^2+4}.$

***Задание 3*:** Вычислить:

а) площадь фигуры, заключенной между кривой $y=4-x^2$ и осью Ox;

б) длину дуги кривой $y=1-\ln\cos x$ в пределах от $x_1=0$ до $x_2=\frac{\pi}{4}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной кривыми $y=\frac{2}{1+x^2}$.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 3.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^2-\sqrt[4]{x^3}+\frac{2}{x}-3\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}};$ в) $\int\frac{x^2}{\left(1-4x^3\right)^2}dx;$

г) $\int\frac{x\,dx}{x^2+5};$ д) $\int\frac{\cos 3x}{1+\sin 3x}dx;$ е) $\int e^{-2x^2}\cdot xdx;$

ж) $\int a^{3x}\,dx;$ з) $\int(2+\sin 2x)dx;$ и) $\int\frac{\cos(\ln x)}{x}dx;$

к) $\int 2^x tg\,2^x\,dx;$ л) $\int\frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}}dx;$ м) $\int xe^x dx;$

н) $\int x\arcsin 5x\,dx;$ о) $\int\frac{x^2+2x-2}{x^3-9x}dx;$ п) $\int\frac{x^3+1}{x^3-2x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{2\sin x-\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1-\sqrt{x}}dx;$ т) $\int\cos 4x\cdot\cos 5x\,dx;$

у) $\int\sin^3 x\,dx;$ ф) $\int\left(e^x-4\right)^2dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}e^{-x}dx;$ б) $\int\limits_0^1\ln xdx.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линией $y=x^2-5$, осью Ox и осью Oy $(y<0)$;

б) длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}(x-3)\sqrt{x}$ между точками пересечения её с Ox;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=3x^2+1$ и прямой $y=3x+7$.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 4.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(1-2\sqrt[3]{x}+\frac{7}{x^4}\right)dx;$ б) $\int\frac{dx}{\sqrt{1+2x}};$ в) $\int\frac{xdx}{\left(3+x^2\right)^3};$

г) $\int\frac{arctg\,2x}{1+4x^2}dx;$ д) $\int\frac{x^2}{1+4x^3}dx;$ е) $\int\frac{e^x}{1-2e^x}dx;$

ж) $\int e^{-x^3}x^2dx;$ з) $\int\sin 2x\,dx;$ и) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int\frac{x\,dx}{\sin x^2};$ л) $\int\frac{dx}{5+4x^2};$ м) $\int(x+2)\cos 5x\,dx;$

н) $\int\arcsin 4x\,dx;$ о) $\int\frac{x-3}{x^3+8}dx;$ п) $\int\frac{x^3-2}{x^3+2x^2+x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{2+\sin x};$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}dx;$ т) $\int\sin x\cdot\cos 3x\,dx;$

у) $\int\cos^4 x\,dx;$ ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}};$ б) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+6x+11}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2-4$ и прямыми $y=0$, $x=-1$ $(x\ge -1)$;

б) длину одной арки циклоиды: $\begin{cases}x=2(t-\sin t)\\ y=2(1-\cos t)\end{cases}$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{4}x^2$, прямой $x=4$ и осью Ox.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 5.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(x^4-\frac{1}{2}x+\sqrt[3]{3x}\right)dx;$ б) $\int\frac{xdx}{\left(1+x^2\right)^5};$ в) $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^3}};$

г) $\int\frac{dx}{x+3};$ д) $\int\frac{\cos x}{1+3\sin x}dx;$ е) $\int e^{2x}dx;$

ж) $\int 2^{-x^2}xdx;$ з) $\int(1-\sin 3x)dx;$ и) $\int\frac{dx}{\cos^2 4x};$

к) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx;$ л) $\int tg3x\,dx;$ м) $\int(x+5)e^{2x}dx;$

н) $\int x^7\ln x\,dx;$ о) $\int\frac{x+2}{x^3-x^2-2x}dx;$ п) $\int\frac{x^4-3}{x^2-25}dx;$

р) $\int\frac{dx}{\cos x+3\sin x};$ с) $\int\frac{dx}{\sqrt{3x+1}+\sqrt[4]{3x+1}};$ т) $\int\cos 3x\sin 2xdx;$

у) $\int\frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}dx;$ ф) $\int\sqrt{4+e^x}\,dx.$

Задание2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^{\infty}\frac{xdx}{x^2+4};$ б) $\int_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной гиперболой $xy=9$, осью OX и прямыми $x=3$ и $x=6$;
б) длину дуги одного оборота спирали Архимеда $\rho=3\varphi$;
в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной полуэллипсом $y=3\sqrt{1-x^2}$, параболой $x=\sqrt{1-y}$ и осью Oy.

Контрольная работа №4

<u>Вариант 6.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2x^7-\frac{3}{\sqrt{x}}+e^x\right)dx$; б) $\int\frac{x^2dx}{\left(1+3x^3\right)^3}$; в) $\int\sqrt{1-5x}dx$;

г) $\int\frac{arctg^2x}{1+x^2}dx$; д) $\int\frac{e^x}{e^x+4}dx$; е) $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$;

ж) $\int 2^{-x^2}xdx$; з) $\int\frac{dx}{\sin^2 3x}$; и) $\int tg2xdx$;

к) $\int\frac{e^x}{\sin e^x}dx$; л) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}}$; м) $\int x\cos 2x\,dx$;

н) $\int 3x^2\ln(x+2)dx$; о) $\int\frac{2-3x}{x^3-4x}dx$; п) $\int\frac{x^3+2}{x^2-2x+3}dx.$

р) $\int\frac{dx}{\sin x-2\cos x}$; с) $\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2-4}+\sqrt[4]{5x^2-4}}$; т) $\int\sin 2x\cdot\cos 7xdx$;

у) $\int\sin^2x\cdot\cos^2xdx$; ф) $\int\left(5+e^x\right)^2dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^\infty\frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; б) $\int\limits_{-1}^1\frac{dx}{(x+1)^4}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$, $y=e^{2x}-3$ и осью Oy;

б) длину дуги кривой $y=\frac{1}{3}x\sqrt{x}$ от $x_1=0$ до $x_2=12$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной графиком функции $y=\sqrt{\operatorname{arctg}x}$ и прямыми $x_1=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $x_2=\sqrt{3}$.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 7.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt{x^3} + 3\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx;$ б) $\int \frac{x^2dx}{\left(1-2x^3\right)^2};$ в) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$

г) $\int \frac{\cos 2x}{1-\sin 2x}dx;$ д) $\int \frac{x}{4x^2-3}dx;$ е) $\int e^{\cos 3x}\sin 3xdx;$

ж) $\int 2^{-3x^2}xdx;$ з) $\int \sin\frac{x}{5}dx;$ и) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x};$

к) $\int tg(1-x)dx;$ л) $\int \frac{2^x dx}{4^x+1};$ м) $\int x\sin 3x\,dx;$

н) $\int x \cdot arctgx\,dx;$ о) $\int \frac{x+3}{x^3+10x^2+25x}dx;$ п) $\int \frac{x^5+3x^2}{x^2+x}dx;$

р) $\int \frac{1+\sin x}{1+\cos x+\sin x}dx.$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx;$ т) $\int \sin x \cdot \sin 3xdx;$

у) $\int \cos^2 x \cdot \sin^3 xdx;$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x-9}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+8};$ б) $\int\limits_{1}^{e} \frac{dx}{x\ln^3 x}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + 2x$ и прямой $y = x + 2$;

б) длину дуги полукубической параболы $ay^2 = x^3$ от начала координат до точки с абсциссой $x = 5a$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной одной волной синусоиды $y = \sin 4x$ и осью Ox.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 8.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2\sqrt{x}-\frac{3}{x^2}+1\right)dx;$ б) $\int\sqrt{2x+3}dx;$ в) $\int\frac{x}{\left(1+4x^2\right)^2}dx;$

г) $\int\frac{dx}{5-x};$ д) $\int\frac{dx}{4x-x\ln x};$ е) $\int xe^{x^2-3}xdx;$

ж) $\int x\cos 2x^2\,dx;$ з) $\int\left(1-\sin\frac{x}{5}\right)dx;$ и) $\int ctg\,2xdx;$

к) $\int\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx;$ л) $\int\frac{xdx}{4+x^4};$ м) $\int e^{2x}\cos xdx;$

н) $\int arctg\,3x\,dx;$ о) $\int\frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x}dx;$ п) $\int\frac{x^2-x+2}{x^3+4x^2+3x}dx;$

р) $\int\frac{dx}{3-2\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+2\sqrt{x}}dx;$ т) $\int\sin x\cdot\sin 3xdx;$

у) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx;$ ф) $\int\sqrt{e^x-3}dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_2^4\frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}.$ б) $\int_e^\infty\frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной параболами: $y^2=4x$ и $x^2=4y$;

б) длину дуги полукубической параболы $y=\sqrt{(x-2)^3}$ от точки $A(2;\,0)$ до точки $B(6;\,8)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$ вокруг оси Oy.

Контрольная работа №4
Вариант 9.

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(2-3\sqrt[5]{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)dx;$ б) $\int\frac{xdx}{\left(1+3x^2\right)^5};$ в) $\int\sqrt{1-2x}dx;$

г) $\int\frac{x^2}{1+2x^3}dx;$ д) $\int\frac{e^{2x}}{e^{2x}+3}dx;$ е) $\int e^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int\sqrt{3^x}\sqrt{5^x}dx;$ з) $\int\frac{x^3}{\sin^2 x^4}dx;$ и) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cdot\cos x}dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2 4x};$ л) $\int(2-3\cos 2x)dx;$ м) $\int\left(1-x^2\right)\sin 3x\,dx;$

н) $\int\ln\left(x^2+5\right)dx;$ о) $\int\frac{x^2+4x}{x-x^2-2x^3}dx;$ п) $\int\frac{x^4}{1-x^2}dx;$

р) $\int\frac{dx}{a\sin x+3\cos x};$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{4-\sqrt[4]{x}}dx;$ т) $\int\sin 2x\cdot\sin 8x\,dx;$

у) $\int\sin^2 x\cdot\cos^3 x\,dx;$ ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{16-e^x}}.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^\infty xe^{-x^2}dx;$ б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{x+x^2}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2x+5$, $y=\frac{x^2}{6}$;

б) длину дуги кардиоиды $\rho=5(1+\cos\varphi)$;

в) объём тела, образованного вращением фигуры, ограниченной параболой $y=\frac{1}{2}x^2$, прямой $y=4-x$, $x=0$ вокруг оси Oy.

Контрольная работа №4
<u>Вариант 10.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x}-2x^3-\frac{1}{x^2}\right)dx;$ б) $\int(1-\sin 2x)^5\cos 2x dx;$ в) $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}};$

г) $\int\frac{x^3dx}{1+4x^4};$ д) $\int\frac{\sin x}{1+2\cos x}dx;$ е) $\int 2^{-x^3}x^2dx;$

ж) $\int\left(e^x+1\right)^2dx;$ з) $\int e^x\sin e^x dx;$ и) $\int\cos 3x dx;$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2(1-x)};$ л) $\int\cos 2x\sin 3x dx;$ м) $\int e^{-2x}(2x+5)dx;$

н) $\int\left(\sin^2 x+1\right)x dx;$ о) $\int\frac{x+4}{x^3-2x^2+3x}dx;$ п) $\int\frac{x^4+x}{27+x^3}dx;$

р) $\int\frac{\cos x}{1+\cos x-\sin x}dx;$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+3\sqrt[4]{x}}dx;$ т) $\int\sin 5x\cdot\cos 8x\, dx;$

у) $\int\cos^5 x dx;$ ф) $\int\left(e^x-3\right)^2dx.$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^2\frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}};$ б) $\int\limits_2^{\infty}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2+5\right)^3}}.$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\ln x$ и прямыми $x=e$, $x=e^2$ и $y=0$;

б) площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox параболы $y^2=2x+1$ от $x_1=1$ до $x_2=7$;

в) объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$ и $y=\sqrt{x}$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 11.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int (4x+1)^2\, dx$ б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x}}$ в) $\int \frac{2x}{(5+x^2)^2}\, dx$

г) $\int \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{1+9x^2}$ д) $\int \frac{x^4}{1+5x^5}\, dx$ е) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4+x^6}}\, dx$

ж) $\int \frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\, dx$ з) $\int \cos 5x \cdot dx$ и) $\int \frac{dx}{\sin^2 2x}$

к) $\int \frac{x \cdot dx}{\cos 2x^2}$ л) $\int \frac{dx}{6+3x^2}\, dx$ м) $\int e^{-2x} \cdot x \cdot dx$

н) $\int (x-3) \cdot \cos 3x\, dx$ о) $\int \frac{x^3}{x^2+2x-1}\, dx$ п) $\int \frac{dx}{x^2+4x+3}$

р) $\int \frac{dx}{5-3\mathbf{cos}\, x}$ с) $\int \frac{\sqrt{x}}{2+3\sqrt{x}}\, dx$ т) $\int \sin x \cdot \cos 2x\, dx$

у) $\int \cos^4 2x\, dx$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{3x}+1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^x dx$ б) $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y = \frac{2}{x},\ y = 5 \cdot e^x,\ \ y = 2,\ \ y = 5.$

б) длину дуги кривой:
$\begin{cases} x = \cos t + t \cdot \sin t \\ y = \sin t - t \cdot \cos t \end{cases},\qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{3}.$

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями:
$y = \sqrt{R^2 - x^2}\ ,\ y = 0.$

Контрольная работа №4.
Вариант 12.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(x^5 - \frac{1}{x^2} + 5\right)dx$ б) $\int \frac{dx}{\sin(5x+1)}$ в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

г) $\int \frac{x}{\sqrt{4+x^2}}\,dx$ д) $\int \frac{x^2}{1+4x^3}\,dx$ е) $\int \frac{3\operatorname{arctg}^2 x}{1+x^2}$

ж) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-1)}$ з) $\int \frac{x^2+1}{(x^3+3x-1)^2}\,dx$ и) $\int \frac{2dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}$ л) $\int \frac{dx}{3+2x^2}\,dx$ м) $\int (x+1)\cdot\cos 2x\,dx$

н) $\int e^{-5x}\cdot x\cdot dx$ о) $\int \frac{x^2}{x^2+x-1}\,dx$ п) $\int \frac{dx}{x^2+4x+2}$

р) $\int \operatorname{tg}(3x)\,dx$ с) $\int \frac{4xdx}{\sqrt{2x^2-1}+\sqrt[4]{2x^2-1}}$ т) $\int \sin 2x\cdot\cos 2x\,dx$

у) $\int \cos^2\frac{x}{2}\,dx$ ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{4x}-1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int_0^\infty \cos x\cdot dx$ б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=\cos x,\ \ y=\sin x,\ \ x=0,\ \ (x\ge 0)$.

б) длину дуги кривой:
$y=x^2$ -1, отсеченной осью Ox.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=x^3,\ \ \mathrm{y}=1,\ \ x=0$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 13.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \left(3x - e^{2x} + 1\right) dx$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+3}}$

в) $\int \frac{2x^2}{\sqrt{1-x^3}} dx$

г) $\int \frac{dx}{2+x}$

д) $\int \frac{\cos 3x}{1+\sin 3x} dx$

е) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$

ж) $\int 3^{x^2} \cdot x \cdot dx$

з) $\int \operatorname{tg}(8x)\, dx$

и) $\int \frac{dx}{\sin^2(2x)}$

к) $\int \frac{dx}{x^2+6x-1}$

л) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+6}}$

м) $\int (x^2+1) \cdot \ln x\, dx$

н) $\int (x+5) \cdot e^x\, dx$

о) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x^3 (x-2)^2} dx$

п) $\int \frac{x-1}{2-x} dx$

р) $\int \frac{dx}{1-\mathbf{sin}\,x}$

с) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} + \sqrt[4]{2x-1}}$

т) $\int \sin x \cdot \cos 5x\, dx$

у) $\int \cos^2 3x\, dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{5x}-1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx$

б) $\int\limits_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y = \sqrt{x},\ y = \frac{1}{x},\ \ x = 16$.

б) длину дуги кривой:
$y = x^{3/2}\ ,\ 0 \le x \le 4$.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy области, ограниченной графиками функций:
$y = x^3,\ \ y = 1,\ \ x = 0$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 14.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3+\sqrt[3]{x^2}-2x}{x}dx$

б) $\int \frac{dx}{3-x}$

в) $\int \frac{\sqrt{3}}{9x^2-3}dx$

г) $\int \sin(4-x)\,dx$

д) $\int e^{5x+1}dx$

е) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

ж) $\int \frac{\sin x}{1+5\cos x}dx$

з) $\int e^{4x^2}\cdot x\cdot dx$

и) $\int \frac{2^x}{1+2^{2x}}dx$

к) $\int \frac{dx}{x^2+3x+1}$

л) $\int \frac{5+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

м) $\int (x+1)\cdot \ln x\,dx$

н) $\int x\cdot\cos 2x\,dx$

о) $\int \frac{x^2+2}{x(x+2)(x+1)}dx$

п) $\int \frac{x+5}{x-4}dx$

р) $\int \sin^2 2x\,dx$

с) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-1}dx$

т) $\int \sin 4x\cdot\cos x\,dx$

у) $\int \cos^3 5x\,dx$

ф) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{6x}-1}}$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x+1}{x^2+2x+2}dx$

б) $\int\limits_1^{e} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=x^2-4x+3,\qquad y=-x^2+2x+3$

б) длину дуги кривой:
$y=\ln x,\qquad 2\sqrt{2}\le x\le 2\sqrt{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=x^3,\quad y=\sqrt{x}.$

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 15.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int \frac{3\sqrt{x}+4x^2-5}{2x^2}dx$ б) $\int \frac{dx}{1-4x}$ в) $\int \frac{9dx}{\sqrt{9x^2-3}}$

г) $\int \sin(5-3x)\,dx$ д) $\int e^{2x-2}dx$ е) $\int \frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$ з) $\int e^{x^2}\cdot x\cdot dx$ и) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-4x^2}}dx$

к) $\int \frac{4^x}{3+4^{2x}}dx$ л) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$ м) $\int (x+1)\cdot e^{-x}\,dx$

н) $\int (x+1)^2\cdot \ln x\,dx$ о) $\int \frac{3x+1}{x+2}dx$ п) $\int \frac{-2x^2+x+2}{x^3(x+2)}dx$

р) $\int \frac{dx}{2-2\sin x}$ с) $\int \frac{x+\sqrt{2+x}}{\sqrt[3]{2+x}}dx$ т) $\int \sin 2x\cdot\cos 4x\,dx$

у) $\int \sin^2 10x\,dx$ ф) $\int \sqrt{e^{4x}-1}dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$ б) $\int\limits_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=-4x,\quad y=32-x^2$

б) длину дуги кривой:
$y=\ln\cos x,\quad 0\le x\le\frac{\pi}{6}$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=-x^2+1,\quad y=0$.

Контрольная работа №4.
Вариант 16.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(4-\frac{5}{x^2}+e^{2x}\right)dx$

б) $\int\frac{x^2}{(1+6x^3)^3}dx$

в) $\int\sqrt{4x+1}\,dx$

г) $\int\frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}}dx$

д) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+5}dx$

е) $\int\frac{dx}{10x^2-1}$

ж) $\int\frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

з) $\int\frac{5tg^2 4x}{\cos^2 2x}dx$

и) $\int ctg\,7x\cdot dx$

к) $\int\frac{e^{2x}}{\cos e^{2x}}dx$

л) $\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt{1-x^2}}$

м) $\int(x-1)\cdot\ln x\,dx$

н) $\int(x-1)\cdot\cos\frac{x}{3}dx$

о) $\int\frac{4-5x}{1-x}dx$

п) $\int\frac{3x^2+1}{(x-1)^2(x+1)}dx$

р) $\int\frac{dx}{5-3\cos x}$

с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-x}dx$

т) $\int\sin x\sin 3x dx$

у) $\int\cos^2 3x\,dx$

ф) $\int\sqrt{e^{5x}-1}dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$

б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\ln x,\quad y=0,\quad x=e$.

б) длину дуги кривой:

$\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$.

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:

$y=e^x,\quad y=1,\quad x=1$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 17.</u>

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(4x^3-\frac{1}{x}+\sqrt[3]{x}\right)dx$ б) $\int\sin 2x\cdot(1+\cos 2x)^4\,dx$ в) $\int\frac{3^x}{2+3^{2x}}dx$

г) $\int\frac{dx}{\sin^2(3x+1)}$ д) $\int x^2\cdot e^x\,dx$ е) $\int(x+1)\cdot 3^x\,dx$

ж) $\int\left(3+e^x\right)^2dx.$ з) $\int\frac{4^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$ и) $\int tg5x\cdot dx$

к) $\int(\cos x^2+1)\cdot x\,dx$ л) $\int\frac{dx}{2x+x\cdot\ln x}dx$ м) $\int arctg7xdx$

н) $\int x\,\mathbf{cos}\,6xdx$ о) $\int\frac{x^2-2}{1-x^2}\,dx$ п) $\int\frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$

р) $\int\cos^3 7x\,dx$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{1-6\sqrt{x}}dx$ т) $\int\sin 3x\cdot\cos x\,dx$

у) $\int\cos^4 x\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^{4x}-1}dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+2}$ б) $\int\limits_1^{e}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=4-x^2,\qquad y=0.$

б) длину дуги кривой:
$$\begin{cases}x=2\cos t\\ y=2\sin t\end{cases},\qquad 0\le t\le\frac{\pi}{3}.$$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=x^2,\quad y=2x.$

Контрольная работа №4.
Вариант 18.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(2+\frac{5}{x^3}+10\sqrt{x}\right)dx$ б) $\int\sqrt{3x+6}\,dx$ в) $\int\frac{x}{1+4x^2}\,dx$

г) $\int\frac{dx}{5x+4}$ д) $\int\frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}\,dx$ е) $\int x\cdot e^{2x^2+1}\,dx$

ж) $\int 4x\cdot\sin 5x^2\,dx$ з) $\int(3+\sin x)\cdot dx$ и) $\int tg\,2x\cdot dx$

к) $\int\frac{e^{4x}}{\cos^2 e^{4x}}\,dx$ л) $\int\sin\frac{x}{3}\cdot\cos^2\frac{x}{3}\,dx$ м) $\int(x^2+1)\cdot\cos x\,dx$

н) $\int arctg\,4x\cdot dx$ о) $\int\frac{x+1}{x^2+2x+3}\,dx$ п) $\int\frac{x^3-x-2}{x^3(x-2)}dx$

р) $\int\frac{x+5}{2-x}\,dx$ с) $\int\frac{\sqrt[4]{x}}{1+5\sqrt{x}}\,dx$ т) $\int\sin 2x\cdot\cos x\,dx$

у) $\int\cos^3\frac{x}{2}\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^x-1}dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{1+\ln x}{x}\,dx$ б) $\int\limits_0^{2}\frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=x^2,\qquad y=\sqrt{x}$.

б) длину дуги кривой:
$y=2\sqrt{x},\qquad \frac{1}{3}\le x\le\frac{1}{8}$.

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Oy фигуры, ограниченной линиями :
$y=\frac{x^3}{3}$, $x=2$, $x=0$, $y=0$.

Контрольная работа №4.
Вариант 19.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(2x+\frac{1}{x^2}-4\cos x\right)dx$ б) $\int\frac{x}{(5+2x^2)^3}dx$ в) $\int\sqrt{4x+1}\,dx$

г) $\int\frac{x^2}{6x^3+1}\cdot dx$ д) $\int\frac{e^x}{3+e^{2x}}dx$ е) $\int x^3\cdot e^{-x^4}\,dx$

ж) $\int 2^x\cdot 3^x\,dx$ з) $\int\frac{ctg^3\frac{x}{3}}{\sin^2\frac{x}{3}}\cdot dx$ и) $\int tg\,6x\cdot dx$

к) $\int\frac{dx}{\cos^2 3x}$ л) $\int(5-2\cos x)\cdot dx$ м) $\int arctg\,2x\cdot dx$

н) $\int(x^2+1)\cdot\sin 2x\,dx$ о) $\int\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx$ п) $\int\frac{x^2+2}{1-x^2}\,dx$

р) $\int\frac{dx}{4\cos x+3\sin x}$ с) $\int\frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}dx$ т) $\int\sin x\sin 4x dx$

у) $\int\sin^2 2x dx$ ф) $\int\sqrt{e^{7x}-1}dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_2^{\infty}\frac{dx}{x\sqrt{2}}$ б) $\int\limits_0^1\frac{dx}{(x-1)^2}$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:

$y=\sin 3x,\quad y=0,\ 0\le x\le\frac{\pi}{3}$.

б) длину дуги кривой:

$y=e^x,\quad \ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}$.

в) Объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями:

$y=\sin x,\ y=0$ при $0\le x\le\pi$.

Контрольная работа №4.
Вариант 20.

Задание 1: Вычислить интегралы

а) $\int\left(4x^3+\frac{1}{x}-1\right)dx$ б) $\int\sqrt{4x+3}\,dx$ в) $\int\frac{x}{1+3x^2}\,dx$

г) $\int\frac{dx}{2x+3}$ д) $\int\frac{\ln^3 x}{x}\,dx$ е) $\int\frac{5^x}{1+5^{2x}}\,dx$

ж) $\int x\cdot\sin 4x^2\,dx$ з) $\int(1-\cos\frac{x}{5})\cdot dx$ и) $\int tg3x\cdot dx$

к) $\int\frac{dx}{\sin^2(3x-1)}$ л) $\int\frac{x}{16-x^4}\,dx$ м) $\int xe^{-2x}dx$

н) $\int(x^2+3)\cdot\cos 2x\,dx$ о) $\int\frac{dx}{x^2+4x-1}$ п) $\int\frac{x^2}{(\mathbf{x}+\mathbf{2})^2(x+4)^2}\,dx$

р) $\int\frac{dx}{\mathbf{sin}x+\mathbf{cos}\,x}$ с) $\int\frac{2+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\,dx$ т) $\int\sin x\cdot\cos 5x\,dx$

у) $\int\cos^3 x\,dx$ ф) $\int\sqrt{e^{6x}+1}dx$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2+x}$ б) $\int\limits_0^{\pi/4} tg2x\,\,dx$

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций:
$y=\sqrt{9-x^2},\quad y=0,\ \ x=0,\ \ x=\frac{3}{2}.$

б) длину дуги кривой:
$y=\frac{x^2}{2},\quad 0\le x\le 1.$

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций:
$y=e^x,\ \ x=0,\ \ x=1,\ \ y=0.$

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 21.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{7}{x} + 3 \right) dx$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+6}}$;   в) $\int \frac{dx}{(x+2)}$;

г) $\int \frac{e^x}{e^x + 7} dx$;   д) $\int \cos x \cdot (\sin^2 x + 1)\, dx$;   е) $\int 3^{-x+1}\, dx$;

ж) $\int \sin^2 (x+7)\, dx$;   з) $\int \left(\sin(7x-5) - \sqrt{x} \right) dx$;   и) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$;

к) $\int \sin(e^x - 7) \cdot e^x dx$;   л) $\int \frac{dx}{e^{8x-9}}$;   м) $\int \sin 3x \cdot x^2 dx$;

н) $\int x \cdot \ln x\, dx$;   о) $\int \frac{3x^2 - 9}{27x - 3x^3} dx$;   п) $\int \frac{3x+2}{3x-2} dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sin x}$;   с) $\int \frac{\sqrt[3]{x} \cdot dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$;   т) $\int \sin 7x \cdot \sin 5x\, dx$;

у) $\int \sin x \cos x dx$;   ф) $\int (2^x - 3^{2x})^2\, dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty} x \cdot e^{-x} dx$;   б) $\int\limits_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^3 + 2,\ y = x - 2,\ x = 2$;

б) длину дуги кривой $y = \ln x$, $\frac{3}{4} \le x \le \frac{12}{5}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x^2\text{-}y = 0,\ y = 0,\ x = -1$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 22.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (3x+5)^7\,dx$;

б) $\int 3\sin(7x-1)\,dx$;

в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx$;

г) $\int \frac{5x}{(7x^2+3)^4}\,dx$;

д) $\int \frac{x^3}{8-x^4}\,dx$;

е) $\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx$;

ж) $\int (e^x+x)^2\,dx$;

з) $\int \frac{7}{x-8}\,dx$;

и) $\int \ln 2x\,dx$;

к) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+4}}$;

л) $\int \frac{\sin 3x}{3+\cos^2 3x}\,dx$;

м) $\int \frac{dx}{x^2-2x+1}$;

н) $\int e^x\cdot x^2\cdot dx$;

о) $\int \frac{dx}{(x+2)(x-1)}$;

п) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$;

р) $\int \frac{dx}{\sin 2x+3}$;

с) $\int \frac{\sqrt{x-7}+7}{\sqrt[3]{x-7}}\,dx$;

т) $\int \sin 3x\cdot\cos 5x\,dx$;

у) $\int \sin^2 3x\,dx$;

ф) $\int \frac{2-3x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_e^{\infty} \frac{dx}{x\cdot\ln^2 x}$;

б) $\int\limits_4^{5} \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-4y=0,\ 2x-4y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\frac{x^2}{4}-\frac{\ln x}{2}$ от точки $x_1=1$ до точки $x_2=2$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиком функции $x^2+y=0$ и прямыми $y=-1,\ x=0$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 23.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\frac{x}{7}-\frac{4}{\sqrt{x}}+3\right)dx$; б) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{7x-1}}$; в) $\int\frac{x}{\sqrt[3]{3x^2-1}}dx$;

г) $\int\frac{x-3}{x^2+5}dx$; д) $\int\frac{e^{-x}}{e^{-x}+e^{-2x}}dx$; е) $\int 8^{x^2}\cdot x\,dx$;

ж) $\int 2^{-4x}\,dx$; з) $\int(2-5^{3x})\,dx$; и) $\int\sin(e^x)\cdot e^x dx$;

к) $\int\frac{x^3}{x^4+7}dx$; л) $\int\sin x\cdot e^{\cos x}dx$; м) $\int 2^x(4x+6)\,dx$;

н) $\int\sin x\cdot x^3 dx$; о) $\int\frac{x^2-7}{x^3-8}dx$; п) $\int\frac{x^2-1}{x^2+3x+2}\mathrm{dx}$;

р) $\int\cos^3 x\,dx$; с) $\int\frac{\sqrt[4]{2x-7}\cdot dx}{1-\sqrt{2x-7}}$; т) $\int\sin 8x\cdot\sin 2x\,dx$;

у) $\int\sin^4 x dx$; ф) $\int(2^x+7)^3 dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{\infty}\frac{dx}{x^2+2x+5}$; б) $\int\limits_1^2\frac{x\cdot dx}{x-1}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $4y+x^2=0, 4y-2x+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\sqrt{1-x^2}-\arcsin x$, $0\le x\le\frac{7}{9}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y=1+8x^3$, $y=1$, $x=-\frac{1}{2}$.

Контрольная работа №4.
Вариант 24.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (x^3+1)\,dx$; б) $\int \dfrac{x^3}{16-x^8}\,dx$; в) $\int \dfrac{3x-1}{x^2+6x+10}\,dx$;

г) $\int \dfrac{e^{3x}}{\sqrt{9-e^{6x}}}\,dx$; д) $\int \cos(3+2x)\,dx$; е) $\int (x+1)\cdot\sin^2(x+2x)\,dx$;

ж) $\int \cos 3x\cdot e^{\sin 3x}dx$; з) $\int \dfrac{\sin 3x}{\sin(\cos 3x)}\,dx$; и) $\int \dfrac{3x-2}{\sqrt{x^2+13x+43}}\,dx$;

к) $\int \dfrac{x+7}{x^3}dx$; л) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{6x-3}}$; м) $\int e^{2x}\cdot x^2dx$;

н) $\int \ln x\,dx$; о) $\int \dfrac{dx}{(x-3)(x+1)}$; п) $\int \dfrac{x^2+1}{x^2+3x+1}dx$;

р) $\int \dfrac{x}{\cos\ \ (x^2+5)}\,dx$; с) $\int \dfrac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\,dx$; т) $\int \sin 7x\sin 3xdx$;

у) $\int \sin^2 4x\,dx$; ф) $\int \dfrac{\sin 4x}{\cos 4x}dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{dx}{(3x-1)^3}$; б) $\int\limits_{-\pi/2}^{0} \mathrm{tg}x\cdot dx$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x+3y^2=0,\ 2x+2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\ln\dfrac{5x}{2}$, $\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y=-4x^3,\ \ y=-4,\ x=0$.

Контрольная работа №4.
Вариант 25.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}-7\right)dx$;
б) $\int\frac{3^x}{1+3^{2x}}\,dx$;
в) $\int\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$;
г) $\int\frac{x^4}{9-x^{10}}\,dx$;
д) $\int e^{\operatorname{ctg}2x}\frac{dx}{\sin^2(2x)}$;
е) $\int\operatorname{tg}(3-x)\,dx$;
ж) $\int\frac{x\cdot dx}{\cos^2(x^2+5)}$;
з) $\int\frac{\arcsin^3 4x}{\sqrt{1-16x^2}}\,dx$;
и) $\int\frac{\operatorname{ctg}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx$;
к) $\int\frac{x^2\cdot dx}{\sin^2(x^3+1)}$;
л) $\int\frac{dx}{\sqrt{x-7}}$;
м) $\int e^{7x}\cdot(2x-3)\,dx$;
н) $\int(x-1)\cdot\sin x\,dx$;
о) $\int\frac{dx}{x^2-x-2}$;
п) $\int\frac{3x^2-2x-2}{x^2+x+2}\,dx$;
р) $\int\frac{\sin 3x}{\sin 3x+\cos 3x}dx$;
с) $\int\frac{\sqrt[3]{x-1}}{1+\sqrt[2]{x-1}}dx$;
т) $\int\cos x\cos 4x\,dx$;
у) $\int\cos^2 x\,dx$;
ф) $\int(x^2+x)\cdot\sin 7x\,dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{9x^2+1}$;
б) $\int\limits_0^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-4y=0,\ 2x+4y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y=-\ln\sin x$, $0\le x\le\frac{\pi}{6}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной кубической параболой $y=-4x^3$ и прямыми $x=1,\ y=0$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 26.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(2^x + e^x + x^2\right)dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{7+x^3}}\,dx$; в) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\sin(\sqrt{x}+5)\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{7-x}$; д) $\int 3^{\sin x}\cdot\cos x\,dx$; е) $\int e^{2x+2}dx$;

ж) $\int 3^x\cdot\cos 3^x\,dx$; з) $\int\left(1-\frac{1}{\cos^2 7x}\right)dx$; и) $\int \mathrm{ctg}(3x)\,dx$;

к) $\int \frac{2^x\cdot dx}{\sin^2(2^x)}$; л) $\int 2^{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\,dx$; м) $\int (x^2-1)\cdot\ln x\,dx$;

н) $\int (x-1)\cdot\sin(x-1)\,dx$; о) $\int \frac{3-2x}{(1+x)(2+x)}dx$; п) $\int \frac{\mathrm{x}^2+x+3}{x^2+3\mathrm{x}+7}dx$;

р) $\int \cos^3(x-8)\,dx$; с) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)^2}+3\sqrt[3]{x+1}}$; т) $\int \cos 7x\cos 3x dx$;

у) $\int \cos^2 2x\cdot\sin^2 2\mathrm{x}\,dx$; ф) $\int \frac{2x+5}{\sqrt{4x^2+12x+9}}dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-5x}dx$; б) $\int\limits_0^1 \frac{3x+2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2+4y=0,\ 2x+4y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=e^x+4$, $\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной параболой $y=x^2+2$ и прямыми $y=0,\ x=1$.

Контрольная работа №4.
Вариант 27.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\frac{3x+7}{\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cdot 4^{\sqrt{x}}\,dx$; в) $\int\frac{\operatorname{tg}(\ln x)}{x}\,dx$;

г) $\int\frac{(x^2+1)\cdot dx}{\sin(x^3+3x)}$; д) $\int\frac{1}{\sqrt{x}}\cos(\sqrt{x}+15)\,dx$; е) $\int\frac{16x+3\cos 3x}{8x^2+\sin 3x}dx$;

ж) $\int\frac{x^3}{9-x^8}dx$; з) $\int\left(3+\sin\frac{7x}{8}\right)dx$; и) $\int\frac{dx}{x\cdot(\ln^2 x+4)}$;

к) $\int e^{\operatorname{tg}2x}\frac{dx}{\cos^2(2x)}$; л) $\int\frac{3^x}{9+9^x}\,dx$; м) $\int x\cdot\operatorname{arctg}(x-1)\,dx$;

н) $\int(x+8)\cdot\sin 3x\,dx$; о) $\int\frac{x+5}{(4+x)(3+x)}dx$; п) $\int\frac{x^3+4}{x^2+x+4}dx$;

р) $\int\frac{3}{3-\sin 3x}dx$; с) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$; т) $\int\cos x\cdot\sin 8x\,dx$;

у) $\int\cos^2 x\cdot\sin^2 x\,dx$; ф) $\int\frac{(1-\sin 2x)^2}{\cos^2 x}dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{4x^2+1}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^3}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $2x-3y^2=0,\ 2x+2y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y=2+\sqrt{x-x^2}$, $\frac{1}{4}\le x\le 1$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y=1+8x^3,\ y=9,\ x=0$.

Контрольная работа №4.
Вариант 28.

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+3\right)dx$; б) $\int\frac{\cos x\cdot dx}{9-\sin^2 x}$; в) $\int\frac{1}{x^3}\sin\frac{1}{x^2}\,dx$;

г) $\int\frac{(x+1)\cdot dx}{\cos^2(x^2+2x)}$; д) $\int\frac{2^{\ln x}}{x}dx$; е) $\int 3^{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

ж) $\int x^3\cdot\sin(x^4+2)\,dx$; з) $\int\left(1-\cos\frac{x-7}{8}\right)dx$; и) $\int\frac{\cos(2x-3)}{\sin(2x-3)}dx$;

к) $\int\frac{e^x}{e^{2x}+4}\,dx$; л) $\int\frac{x^2}{27+x^3}dx$; м) $\int(x^2+3)\mathrm{e}^{5\mathrm{x}}\,dx$;

н) $\int e^x\cdot\sin x\,dx$; о) $\int\frac{3x^2+3}{x^3+3x-4}dx$; п) $\int\frac{x^2+x+7}{x^2-2x-3}dx$;

р) $\int\frac{\cos 4x-3}{\sin(6x+5)}dx$; с) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+2\sqrt[4]{5x+1}}$; т) $\int\sin 2x\cdot\sin 4x\,dx$;

у) $\int\sin^2(3x-4)\,dx$; ф) $\int\frac{x-3\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}\frac{dx}{16x^2+1}$; б) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt{(1+x)^5}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-2y=0,\ 2x-2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\ln(x^2-1)$, $2\le x\le 3$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x-y^2=0,\ \ y=1,\ x=0$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 29.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(2-5\cos x-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)dx$; б) $\int\dfrac{dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln^2 x}}\,dx$; в) $\int\dfrac{1}{x^2}\cdot\sin\dfrac{3}{x}\,dx$;

г) $\int e^x\cdot\cos e^x\,dx$; д) $\int\dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x-5}}\,dx$; е) $\int\dfrac{\sin 3x\cdot\cos 3x}{5+\sin^2 3x}\,dx$;

ж) $\int \mathrm{tg}(7-2x)\,dx$; з) $\int\dfrac{x^4}{16-x^{10}}\,dx$; и) $\int 5^x\dfrac{dx}{\sin^2(5^x)}$;

к) $\int\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{7^x}\cdot dx$; л) $\int\dfrac{x}{x^2+25}\,dx$; м) $\int\arccos(4x-1)\,dx$;

н) $\int x\cdot\mathrm{arctg}3x\,dx$; о) $\int\dfrac{x+3}{x^2+6x+7}\,dx$; п) $\int\dfrac{x^3}{9-x^2}\,dx$;

р) $\int\dfrac{dx}{\cos(7x+5)-1}$; с) $\int\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$; т) $\int\sin 13x\cos 3x dx$;

у) $\int\cos^4 3x\,dx$; ф) $\int\dfrac{dx}{\sqrt{64-x^2}}$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_{14}^{+\infty}\dfrac{dx}{\sqrt[4]{x+2}}$; б) $\int\limits_{-5}^{-4}\dfrac{dx}{\sqrt[3]{(x+5)^4}}$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3y^2+4x=0,\ 4x+2y+1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\arccos x$, $0\le x\le\dfrac{8}{9}$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $x-2y^3=0,\ \ y=0,\ x=1$.

Контрольная работа №4.
<u>Вариант 30.</u>

Задание 1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int\left(\sqrt[3]{x}-\frac{7}{x^3}\right)dx$;   б) $\int x^2\cdot\sin x^3\,dx$;   в) $\int\frac{x\cdot dx}{\sqrt[3]{1-3x^2}}$;

г) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt{3-\ln x}}\,dx$;   д) $\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{4-e^{4x}}}\,dx$;   е) $\int e^{\mathrm{tg}x}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

ж) $\int(1+2x)\cdot\mathrm{ctg}(x^2+x)\,dx$;   з) $\int\frac{\sin(7-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,dx$;   и) $\int\sin(7x-1)\,dx$;

к) $\int\frac{1}{x^5}\cdot\sin\frac{1}{x^4}\,dx$;   л) $\int\frac{dx}{\sqrt[7]{x-3}}$;   м) $\int cos3xe^{5x-3}dx$;

н) $\int(x^2-x)\cdot e^{3x}\,dx$;   о) $\int\frac{dx}{x^2-x}$;   п) $\int\frac{x^2+7x+3}{x^2-5x-1}dx$;

р) $\int\frac{(1-\sin x)^2}{\cos^2 x}dx$;   с) $\int\frac{\sqrt[6]{x+3}}{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{x+3}}dx$;   т) $\int\cos x\cos(3x+2)dx$;

у) $\int\cos^4(4x+7)dx$;   ф) $\int(2^x-3)^2\,dx$.

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

а) $\int\limits_0^{+\infty}e^{-3x}dx$;   б) $\int\limits_0^1\frac{4x+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}dx$.

Задание 3: Вычислить:

а) площадь фигуры, ограниченной графиками функций $3x^2-2y=0,\ 2x+2y-1=0$;

б) длину дуги кривой $y=\frac{1}{2}e^x+2$, $0\le x\le 1$;

в) объем тела, полученного вращением вокруг оси Ox области, ограниченной графиками функций $y+x^2=0,\ \ y=0,\ x=1$.